

## **Анализ зависимости значения первой частоты собственных колебаний плоской фермы от числа панелей**

*Слепцов Вадим Дмитриевич*

*Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

*Студент*

### **Аннотация**

В данной статье рассмотрена плоская модель статически определимой фермы. С помощью метода индукции, метода Донкерлея и интеграла Максвелла-Мора была получена нижняя оценка основной частоты от числа панелей, из которых состоит ферма. В процессе сравнения результата со значением частоты, которое было получено из анализа системы с учетом всех степеней свободы, была показана высокая точность выведенной формулы. С увеличением числа степеней свободы точность формулы растет. Расчеты проводились в системе символьной математике Maple.

**Ключевые слова:** плоская ферма, колебания, основная частота, метод Донкерлея, интеграл Максвелла-Мора, нижняя оценка основной частоты, Maple, метод индукции

## **Analysis of the dependence of the value of the first natural frequency of a flat truss on the number of panels**

*Sleptsov Vadim Dmitrievich*

*National Research University "MPEI"*

*Student*

### **Abstract**

In this paper a flat model of a statically determined truss is considered. Using the induction method, the Dunkerley method and the Maxwell-Mohre integral, a lower estimate of the fundamental frequency of the number of panels that make up the truss has been obtained. In the process of comparing the result with the value of frequency that was obtained from the analysis of the system considering all the degrees of freedom, a high accuracy of the derived formula was shown. It is also worth paying attention to the fact that as the number of degrees of freedom increases, the accuracy of the formula increases. The calculations were performed in the system of symbolic mathematics Maple.

**Keywords:** flat truss, oscillations, fundamental frequency, Dunkerley method, Maxwell-Mohre integral, lower estimate of fundamental frequency, Maple, induction method

Для расчета спектра частот собственных колебаний инженерных конструкций на практике чаще всего используются численные методы, в

основе которых лежит дискретизация метода конечных элементов [1-3]. Аналитические расчеты редки и применяются в основном для простых моделей регулярных ферм для нижней или верхней оценки первой частоты с применением метода Донкерлея (оценка снизу) или Рэлея (оценка сверху) [4-10]. Масса фермы в таких моделях как правило сосредотачивается в узлах. Решения на основе оценок Донкерлея и Рэлея дают простые аналитические выражения для границ частоты при произвольном числе панелей, если ферма регулярная. Наиболее простой метод — это метод Донкерлея [11]. Другой метод, метод Рэлея (энергетический), дает более громоздкие расчетные формулы. Известны также аналитические решения некоторых задач деформации для плоских и пространственных регулярных ферм [12-17].

В настоящей работе приводится вывод формулы для зависимости первой (наименьшей) частоты собственных колебаний плоской фермы от числа панелей. Ферма статически определимая симметричная балочного типа с решетками перекрестного типа в боковых стойках и треугольного типа в верхней части конструкции (рис.1). Верхняя часть фермы, зависящая от числа  $n$  (изменяемый параметр) соединяет две боковые стойки, зависящие от числа  $m$  (неизменяемый параметр). Панель верхней части фермы имеет длину  $2a$  и высоту  $h$ . Длины и высоты решеток перекрестного типа представлены на рисунке 1. Предполагается, что масса фермы равномерно распределена по узлам нижнего и верхнего пояса. Массы колеблются по вертикали.

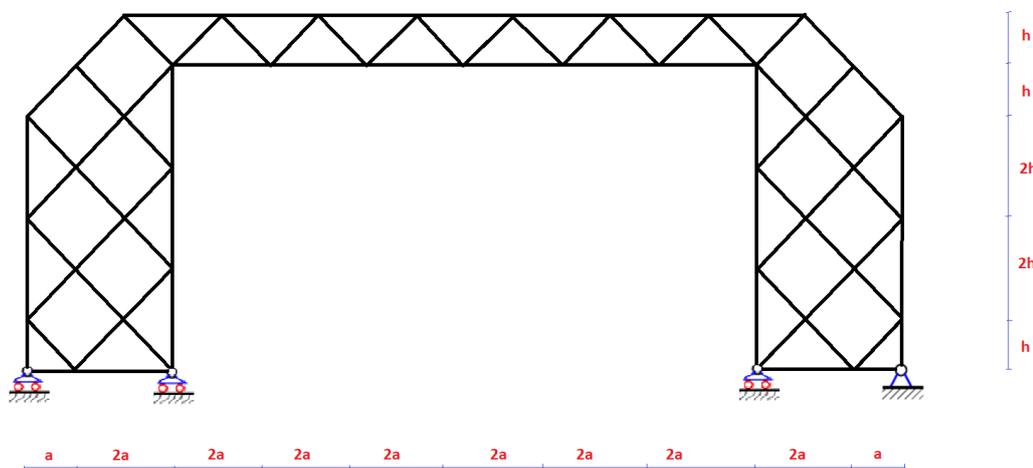


Рисунок 1 – Ферма при  $n=3$ ,  $m=3$

Число степеней свободы используемой модели фермы равно числу узлов  $N=4n+21$ . Ферма состоит из  $K=8n+42$  стержней (включая пять опорных стержней). Уравнения колебаний системы грузов имеют матричный вид:

$$\mathbf{J}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N \mathbf{Y} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{D}_N$  – матрица жесткости конструкции,  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  – вектор (набор) смещений грузов по вертикали,  $\mathbf{J}_N = m\mathbf{I}_N$  – матрица инерции системы диагонального вида в случае одинаковых масс,  $\mathbf{I}_N$  – единичная матрица,  $\ddot{\mathbf{Y}}$  —

вектор ускорений масс. Обратной к матрице жесткости  $\mathbf{D}_N$  является матрица  $\mathbf{B}_N$ , элементы которой (смещения от единичных сил) вычисляются с помощью интеграла Мора. Суммирование проводится по всем стержням фермы:

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^K S_k^{(i)} S_k^{(j)} l_k / (EF). \quad (2)$$

Здесь  $S_k^{(i)}$  — усилие в стержне  $k$  от действия единичной вертикальной силы в узле  $i$ ,  $l_k$  — длина стержня  $k$ ,  $E$  — модуль упругости материала стержней,  $F$  — площадь поперечного сечения стержней. Жесткости всех стержней в простейшей постановке принимаются одинаковыми.

Приближенное решение по методу Донкерлея для оценки первой частоты колебаний снизу  $\omega_D$  выражается через парциальные частоты:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (3)$$

где  $\omega_k$  — парциальная частота колебаний массы  $m$ . Для расчета колебаний отдельной массы при вычислении парциальной частоты уравнение (1) записывается в скалярном виде:

$$m \ddot{y}_k + d_k y_k = 0,$$

где  $d_k$  — коэффициент жесткости,  $y_k$  — смещение массы,  $\ddot{y}_k$  — ускорение. Отсюда для частоты колебаний одного груза (парциальной частоты груза в узле  $k$ ) получается формула:  $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$ . Для определения коэффициента

жесткости используется интеграл Мора:  $\delta_k = 1 / d_k = \sum_{j=1}^K (\tilde{S}_j^{(k)})^2 l_j / (EF)$ .

Введено обозначение:  $\tilde{S}_j^{(k)}$  — усилие в стержне с номером  $j$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу  $k$  с массой. Из (3) следует:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m \Delta_n. \quad (4)$$

Для расчета усилий в стержнях методом вырезания узлов в аналитической форме используется система символьной математики Maple. В программу вносятся координаты узлов. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> for i to m do
      x[i+1]:=0:                               y[i+1]:=2*h*i-h:                               end:
> for i to m-1 do
      x[i+m+1]:=a*i:                           y[i+m+1]:=2*h*m-h+h*i:                           end:
> for i to 2*n do
      x[i+2*m]:=a*(m-1)+2*a*i: y[i+2*m]:=2*h*m-h+h*(m-1): end:
```

Расчет усилий в стержнях и применение формулы (4) для ферм с различным числом панелей дает общий вид для коэффициента  $\Delta_n$ :

$$\Delta_n = (C_{1n}a^3 + C_{2n}h^3 + C_{3n}c^3) / (90n^2h^2EF). \quad (5)$$

Для коэффициентов в этой формуле методами системы Maple получают формулы, как решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют члены последовательностей коэффициентов. Операторы системы Maple дают:

$$C_{1,n} = 512n^6 + 80n^4 + 4320n^3 + 2333n^2 + 135n,$$

$$C_{2,n} = 1680n^3 + 11610n^2 + 5685 / 2(2n + 2835),$$

$$C_{3,n} = 240n^4 + 4665n^2 + 405n.$$

В итоге

$$\omega_D^{-2} = m(C_{1n}a^3 + C_{2n}h^3 + C_{3n}c^3) / (90n^2h^2EF). \quad (6)$$

Полученное решение необходимо сравнить с численным, полученным для системы с  $N$  степенями свободы. Для этого используется оператор **Eigenvalues** из пакета **LinearAlgebra** для вычисления собственных значений матрицы  $\mathbf{B}_N$ . Для расчетов приняты размеры фермы:  $a = 3\text{м}$ ,  $h = 4\text{м}$ . Площадь поперечных сечений всех стержней принимается одинаковой:  $F = 8\text{см}^2$ . Модуль упругости стали  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{МПа}$ , массы в узлах  $m = 200\text{кг}$ . На рисунке 2 сравниваются зависимость от количества панелей нижней оценки наименьшей частоты  $\omega_D$  по формуле Донкерлея (8) и значения первой частоты  $\omega_1$  спектра системы с  $N$  степенями свободы, найденная численно.

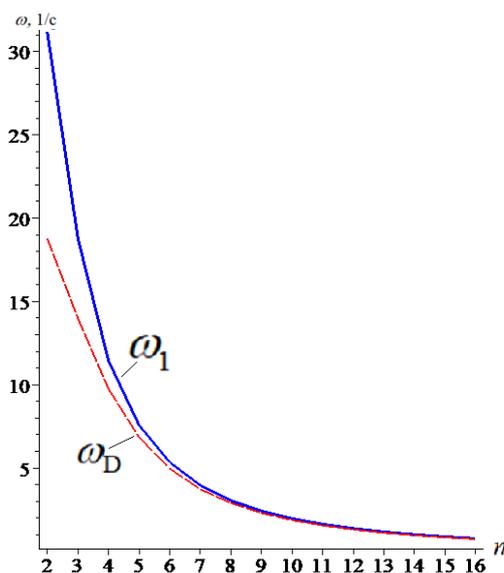


Рисунок 2 – Зависимость частоты колебаний от числа панелей

Как и предполагалось, метод Донкерлея дает оценку частоты снизу. Для более точного сравнения аналитического решения и численного вводится относительная величина  $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$ .

Из рисунка 3 видно, что с увеличением числа панелей погрешность выведенной формулы (6) падает, принимая вполне допустимое значение в несколько процентов уже при  $n=10$ .

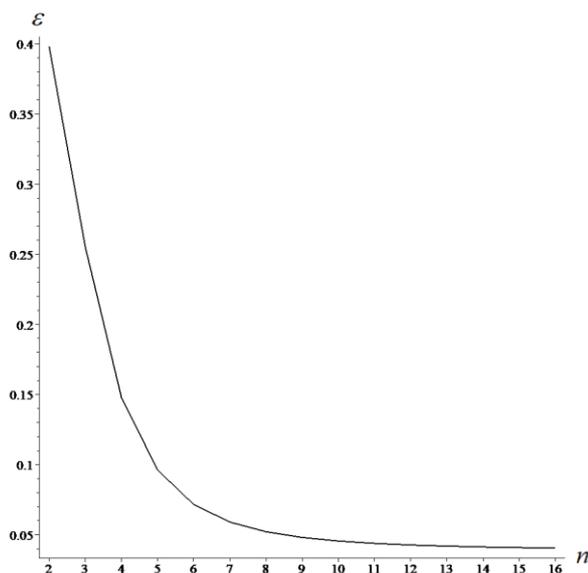


Рисунок 3 – Погрешность аналитической формулы

### Библиографический список

1. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
2. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С.13-20.
3. Зименков Н. А. Формула прогиба внешне статически неопределимой трапецевидной фермы с перекрестной решеткой // Постулат. 2019. № 6.
4. Кирсанов М.Н., Лыонг Конг Луан Прогиб и нижняя граница основной частоты собственных колебаний балочной фермы // Строительная механика и конструкции 2022. №4(35). С. 24-33. DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
5. Тиньков Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций //Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
6. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple// Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 15-25.
7. Kirsanov M.N., Safronov, V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14
8. Петриченко Е.А. Оценка частоты собственных колебаний фермы Финка // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов двадцать седьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. М., 2021. С. 999.
9. Astakhov S.V., Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. Formulas for calculating

- deformations of power line supports // В сборнике: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Сер."International Science and Technology Conference "Earth Science", ISTC EarthScience 2022 - Chapter 4." 2022. С. 052008. DOI: 10.1088/1755-1315/988/5/052008
10. Trainor P.G.S., Shah A.H., Popplewell N. Estimating the fundamental natural frequency of towers by Dunkerley's method // Journal of Sound and Vibration. 1986. №109(2). С. 285–292. doi:10.1016/S0022-460X(86)80009-8.
  11. Low K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. №42(7). С. 1287–1305. doi:10.1016/S0020-7403(99)00049-1
  12. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. №3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5
  13. Arutyunyan V. B. Analytical calculation of the deflection street bracket for advertising // Postulat. 2019. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/download/2300/2340>
  14. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
  15. Шурова Ю.Д. Аналитический расчет прогиба фермы с симметричной и несимметричной нагрузкой // Постулат. 2020. № 6. С.1
  16. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. №4(35). С.40-48. DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.005
  17. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Плясова А.А. Расчет прогиба плоской рамы с произвольным числом панелей в системе Maple методом индукции // Постулат. 2019. № 3. С. 9