УДК 624.04:531.391.3

Оценка первой частоты собственных колебаний плоской фермы

Баранов Егор Михайлович
Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Студент

Аннотация
В работе рассмотрена динамика плоской модели статически определимой фермы. При помощи метода индукции, метода Донкерлея и формулы Максвелла – Мора получена формула зависимости нижней оценки основной частоты от числа панелей. Проведение сравнения результата со значением частоты, полученным из анализа системы с учетом всех степеней свободы показало высокую точность выведенной формулы. Важным является тот факт, что при увеличении числа степеней свободы точность формулы растет. Расчеты проводились с использованием компьютерной программы Maple.
Ключевые слова: Maple, индукция, ферма, метод Донкерля, анализ, расчет, частота, формула.

Analysis of the planar truss natural vibrations first frequency

Baranov Egor Mikhailovich
National Research University "MPEI"
Student

Abstract
In the course of the work the planar model of a static truss was considered, as well as the lower estimate of the main frequency was calculated using the induction method and the Maxwell – Mohr formula. The comparison of the frequency value with the frequency value obtained as a result of the system analysis with all degrees of freedom showed a high accuracy of the derived formula. The important thing is that when you increase the number of degrees of freedom, the accuracy of the formula increases. Calculations were carried out using the computer program Maple.
Keywords: maple, induction, truss, Dunkerley method, analysis, calculation, frequency, formula.

Численные методы, основанные на дискретизации метода конечных элементов [1-3], часто используются на практике для расчета частотного спектра собственных колебаний инженерных конструкций. Аналитические расчеты проводятся редко и в основном используются для простых моделей ферм для нижней или верхней оценки первой частоты с использованием метода Донкерля (снизу) или Рэлея (сверху) [4-10]. Масса фермы в таких моделях обычно концентрируется в узлах. Решения, основанные на оценках Донкерли и Рэлея, дают простые аналитические показания для ограничения частоты произвольных панелей, если ферма регулярна. Простейшим методом является метод Донкерлея [11]. Другой метод, метод Рэлея (энергетический), дает более громоздкие формулы расчета. Аналитические решения задач по деформации плоских и пространственных регулярных ферм так же часто используемы [12-14]. В [15] получена аналитическая оценка частоты собственных колебаний плоской решетки.

В этой статье представлен вывод формулы для зависимости числа панелей от первой (наименьшей) частоты собственных колебаний. Заданная ферма статически определимая симметричная, арочного типа с треугольной решеткой (рис. 1). Средняя панель с ромбообразной решеткой соединяет две части фермы с h панелями длинной a в каждой. Принято, что масса фермы распределена по узлам верхнего и нижнего пояса. Высота фермы $2h$. Колебания масс происходят по вертикали.

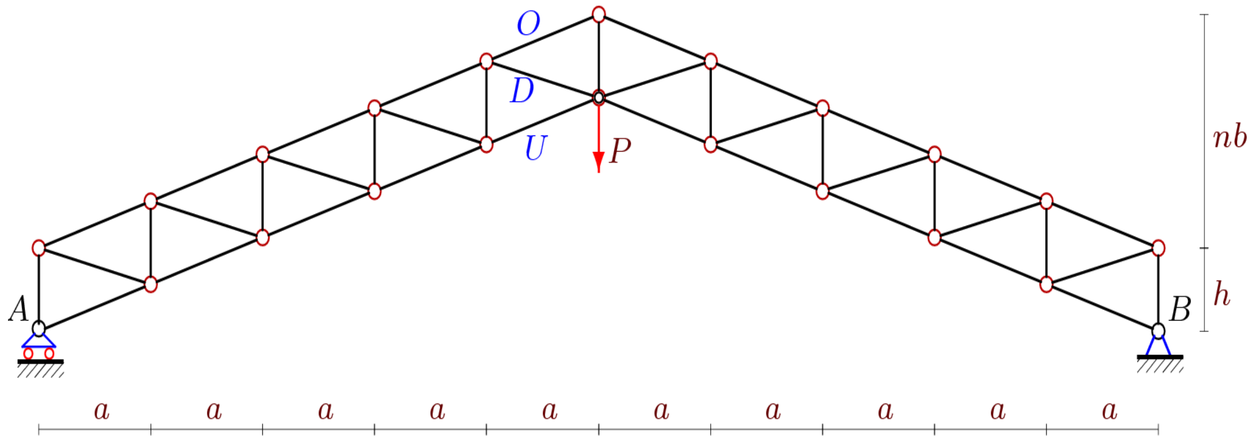

Рисунок 1 – Ферма при n=4

Ферма состоит из $K=8(n+1)$ стержней (включая три опорные стержня). Число степеней свободы используемой модели фермы равно числу узлов: $N=4(n+2)$.

Уравнения колебаний системы грузов имеют матричный вид:

$$\mathbf{J}_N\ddot{\mathbf{Y}}+\mathbf{D}_N\mathbf{Y}=0, \tag{1}$$

где $\mathbf{D}_N$ – матрица жесткости конструкции, $\mathbf{Y}=[y_1,y_2,...,y_N]^T$ – вектор (набор) смещений грузов по вертикали, $\mathbf{J}_N=m\mathbf{I}_N$ – матрица инерции системы диагонального вида в случае одинаковых масс, $\mathbf{I}_N$ – единичная матрица, $\ddot{\mathbf{Y}}$ — вектор ускорений масс. Обратной к матрице жесткости $\mathbf{D}_N$ является матрица $\mathbf{B}_N$, элементы которой (смещения от единичных сил) вычисляются с помощью формулы Максвелла – Мора. Суммирование проводится по всем стержням фермы:

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{K}S_k^{(i)}S_k^{(j)}l_k/(EF_k), \tag{2}$$

Здесь $S_k^{(i)}$ — усилие в стержне k от действия единичной вертикальной силы в узле i, l_k — длина стержня k , E — модуль упругости материала стержней, F — площадь поперечного сечения стержней. Жесткости всех стержней в простейшей постановке принимаются одинаковыми.

Приближенное решение по методу Донкерлея для оценки первой частоты колебаний снизу ω_D выражается через парциальные частоты:

$$\omega_D^{-2}=\sum_{k=1}^{N}\omega_k^{-2}, \qquad (3)$$

где ω_k — парциальная частота колебаний массы m. Для расчета колебаний отдельной массы при вычислении парциальной частоты уравнение (1) записывается в скалярном виде:

$$m\ddot{y}_k + d_k y_k = 0,$$

где d_k — коэффициент жесткости, y_k — смещение массы, $\ddot{y}_k$ — ускорение. Отсюда для частоты колебаний одного груза (парциальной частоты груза в узле k) получается формула: $\omega_k=\sqrt{d_k/m}$. Для определения коэффициента жесткости используется интеграл Мора: $\delta_k = 1/d_k=\sum_{j=1}^{K}\left(\tilde{S}_j^{(k)}\right)^2 l_j/(EF)$.

Введено обозначение: $\tilde{S}_j^{(k)}$ — усилие в стержне с номером j от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу k с массой. Из (3) следует:

$$\omega_D^{-2}=m\sum_{k=1}^{N}\delta_k=m\Delta_n. \qquad (4)$$

Для расчета усилий в стержнях методом вырезания узлов в аналитической форме используется система символьной математики Maple. В программу вносятся координаты узлов. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> for i to n+1 do x[i]:=a*(i-1):y[i]:=b*(i-1):end:
> for i to n do x[i+n+1]:=a*n+a*i:y[i+n+1]:=b*(n)-b*i:end:
```

Расчет усилий в стержнях и применение формулы (4) для ферм с различным числом панелей дает общий вид для коэффициента Δ_n:

$$\Delta_n=\frac{C_1a^3+C_2c^3+C_3b^3}{4b^2EF}. \qquad (5)$$

Обозначено: $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Для коэффициентов в этой формуле методами системы Maple получаются формулы, как решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют члены последовательностей коэффициентов. Операторы системы Maple дают:

$$C_1=15(-1)^n n^4+6(-1)^n n^3+15n^2+15n,$$

$$C_2=7n+32n^5+20n^3,$$

$$C_3=6(-1)^n n^3-1+n.$$

В итоге

$$\omega_D^2 = \frac{1}{(\Phi_1 C_1^3 + \Phi_2 C_2^3 + \Phi_3 C_3^3)} \cdot 4mEF \qquad (6)$$

Полученное решение необходимо сравнить с численным, полученным для системы с N степенями свободы. Для этого используется оператор **Eigenvalues** из пакета **LinearAlgebra** для вычисления собственных значений матрицы $\mathbf{B}_N$. Для расчетов приняты размеры фермы: $a=3$м, $h=4$м. Площадь поперечных сечений всех стержней принимается одинаковой: $F=8$см^2. Модуль упругости стали $E=2{,}0\cdot10^5$МПа, массы в узлах $m=200$кг. На рисунке 2 сравниваются зависимость от количества панелей нижней оценки наименьшей частоты ω_D по формуле Донкерлея и значения первой частоты ω_1 спектра системы с N степенями свободы, найденная численно.

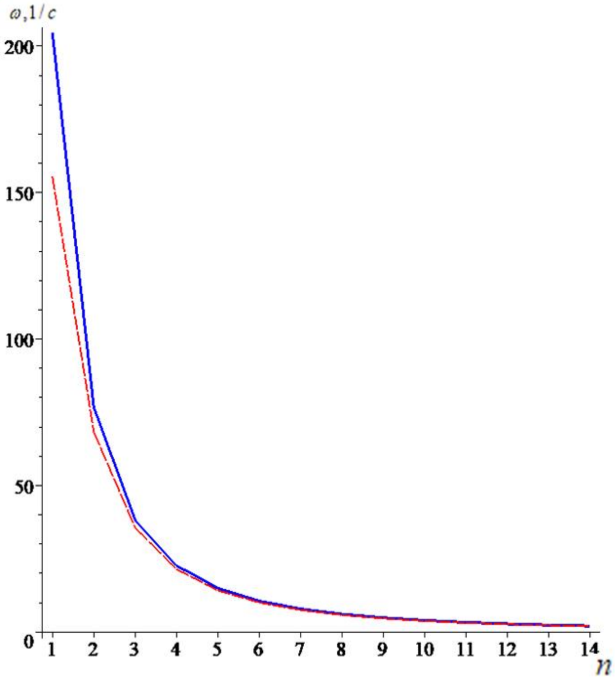

Рисунок 2 – Зависимость частоты колебаний от числа панелей

Как и предполагалось, метод Донкерлея дает оценку частоты снизу. Для более точного сравнения аналитического решения и численного вводится относительная величина $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$.

Из рисунка 3 видно, что с увеличением числа панелей погрешность выведенной формулы (6) падает, принимая вполне допустимое значение в несколько процентов уже при n=10.

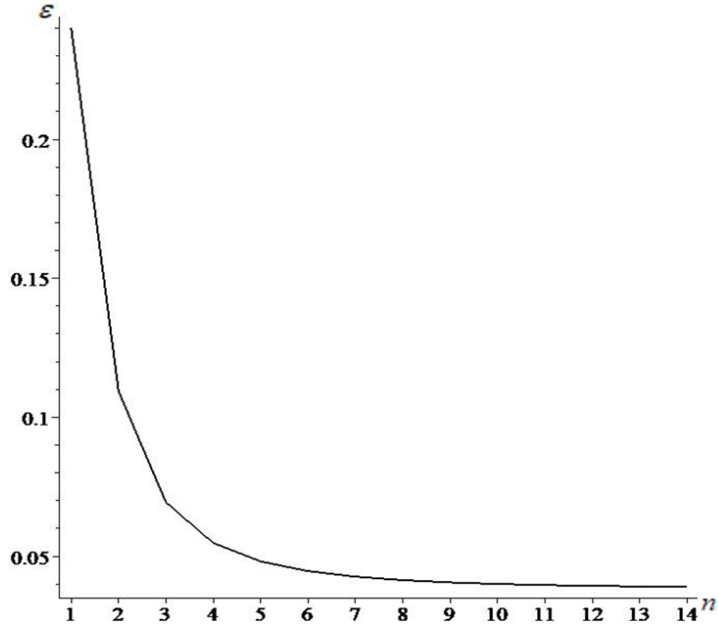

Рисунок 3 – Погрешность аналитической формулы

Библиографический список

1. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
2. Грибова О.В. Вывод зависимости прогиба плоской трапецевидной фермы от числа панелей // Постулат. 2020. №3. С. 6.
3. Терзе С.В. Аналитический расчет зависимости деформаций консольной стойки от числа панелей в системе Maple // Строительная механика и конструкции. 2020. №2 (25). С. 16-24.
4. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. №4(35). С.40-48. DOI 10.36622/VSTU.2022.35.4.005
5. Широков А.С. Зависимость прогиба и первой частоты колебаний плоской фермы от числа пролетов// В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. тезисы докладов Двадцать восьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2022. С. 807.
6. Воробьев О.В., Кирсанов М.Н. Сравнительные характеристики плоских ферм с подъемом. Аналитические решения // Технологии будущего: VI Междунар. науч.-техн. конф. Студентов и аспирантов (23–27 мая 2022 г., Москва): сборник трудов конференции. М.: Издательство МЭИ, 2022. С. 313-318.
7. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формулы зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple// Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 15-25.
8. Грибова О.В. Вывод зависимости прогиба плоской трапецевидной фермы от числа панелей //Постулат. 2020. №. 3.

9. Суд И. Б. Формулы для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №2 (25). С. 25-32.
10. Тимофеева Т.А. Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 26-33.
11. Kirsanov M. N., Dai Qiao Dependence of the natural oscillation frequency of the half-tilt console on the number of panels // Строительная механика и конструкции. 2021. №1(28). С.39-44.
12. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка //Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С. 21-29.
13. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты фермы с учетом жесткости опор по Донкерлею в системе Maple // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. тезисы докладов Двадцать восьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2022. С. 799.
14. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels //AlfaBuild. 2021. Т. 17. №. 2. С. 1701-1701.
15. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор// Строительная механика и конструкции. 2021. №4(31). С.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002