УДК 004

Анализ применения ряда Фурье в информационных системах

Ленкин Алексей Викторович
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
студент

Аннотация
В данной статье рассмотрены общее понятие ряда Фурье, изучение его основных функций, свойств, видов. Представлено практическое применение ряда Фурье в информационных системах.
Ключевые слова: ряд Фурье, преобразование Фурье, дискретный сигнал, непрерывный сигнал.

Analysis of Fourier series using in information systems

Lenkin Aleksei Viktorovich
Sholom-Aleichem Priamursky State University
student

Abstract
In the article Fourier series general notion, its main functions, properties, types are discussed. The practical Fourier series application in information systems is presented.
Keywords: Fourier series, Fourier transform, discrete signal, continuous signal.

На сегодняшний день существует потребность в специалистах, обладающих хорошими знаниями в области информационных технологий и способных работать на уровне зарубежных коллег. Чтобы решить эту проблему, конечно, может потребоваться усиление норм приёма на работу в данной сфере. Это может повысить мотивацию к изучению математики более подробно и внимательней. Так как одно из главных требований к хорошему специалисту – знание некоторых разделов математического анализа.

Для улучшения знаний мат. анализа в большей степени требуется отлично знать понятия рядов Фурье, их свойства, функционал, а также изучить их практическое применение.

Ряд Фурье представляет возможность просматривать различные функции (периодические, непериодические), разлагая их на составные части с теорией о том, что все необходимые для использования на практике функции в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ можно записать в форме сходящихся тригонометрических рядов.

Целью данного реферата является общее понятия ряда Фурье, изучение его основных функций, свойств, видов и практическое применение в информационных системах.

Свое название ряд Фурье получил в честь французского математика и физика Жана Батиста Жозефа Фурье. В 1822 году он представил работу “Аналитическая теория тепла”, в которой он вывел дифферинциальное уравнение теплопроводности, а также вывел метод разделения переменных для решения уравнений теплопроводности, названый позже метод Фурье. И хотя это разложение уже было давно известно научному обществу, широкое практическое применение оно получило только у Фурье. И в скорее так называемые ряды Фурья начали использоваться во всех сферах математического исследования, начиная от астрономии и заканчивая радиотехникой, на данный момент даже в компьютерной графике.

Ряд Фурье – в математике – способ представления любой сложной функции суммой более простых. Число функций бывает и бесконечным и чем больше таких функций, чем выше точность разлагаемой функции. Чаще в качестве простейших используются тригонометрические функции синуса и косинуса, в этом случае ряд Фурье называется тригонометрическим.

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in L_2([-\pi,\pi])$ называют функциональный ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

Коэффициенты a_o,a_n и b_n называются коэффициентами Фурье.

Наиболее часто «преобразование Фурье» применяют с целью обозначения непрерывного преобразования Фурье, представляющего различную квадратично-интегрируемую функцию $f(t)$ равно как необходимую сумму (интеграл Фурье) комплексных показательных функций с угловыми частотами ω и комплексными амплитудами $F(\omega) = \mathcal{F}(f)(t)$. Преобразование содержит ряд конфигураций, различающихся стабильными коэффициентами.

$$F_1(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\tau,$$

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right),$$

$$F_3(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau = F_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right),$$

где $\omega = 2\pi\nu$.

В различных сферах науки и техники имеют все шансы доминировать разные формы.

Непрерывное преобразование само по сути считается обобщением наиболее ранней идеи рядов Фурье, какие установлены для периодических функций либо функций, имеющихся в узкой области $f(x)$ (с периодом 2π), и изображают данные функции в виде рядов синусоид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{inx},$$

где F_n– комплексная амплитуда. Или, для вещественно-значных функций, ряд Фурье часто записывается как:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

где a_nи b_n– (действительные) амплитуды ряда Фурье.

Для применения в пк, равно как ради научных расчетов, так и с целью числовой обрабатывания сигналов, нужно иметь функции x_k, которые установлены в дискретном множестве точек за место непрерывной области, вновь периодическом либо ограниченном. В данном случае применяется дискретное преобразование Фурье (DFT), что изображает x_k как сумму синусоид:

$$x_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{2\pi ijk/n} \qquad k = 0,\ \dots,\ n-1,$$

где f_j– амплитуды Фурье. Хотя непосредственное применение этой формулы требует $\mathrm{O}(n^2)$ операций, этот расчет может быть сделан за $\mathrm{O}(n \log n)$ операций используя алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ, FFT), отчего делает преобразование Фурье почти значительной операцией в пк.

Классическое преобразование Фурье имеет дело со спектром сигнала, присвоенным в абсолютно всем диапазоне существования переменной. Зачастую внимание предполагает только лишь локальное распределение частот, в то время как необходимо сберечь начальную переменную (как правило время). В данном случае употребляется составление преображения Фурье, так именуемое оконное преобразование Фурье. Для основы нужно подобрать определенную оконную функцию:

$$F(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) W(\tau - t) e^{-i\omega\tau}\, d\tau,$$

где $F(t,\, \omega)$ даёт (вообще говоря несколько искажённое) распределение частот части оригинального сигнала $f(t)$ в окрестности времени t.

В дискретном преобразовании Фурье исследуемая функция считается периодической обладает конечный период возобновления, и считается дискретной. По сути, дискретное преобразование Фурье дает возможность показать дискретную функцию в варианте окончательного количества частот с определёнными значениями амплитуды и фазы (раскладывает функцию в ее спектр). Такое основывается на том, что согласно следствию с теоремы Котельникова в дискретном сигнале период, соответствующий наивысшей вообразимой частоте подходит 2 периодам дискретизации. С целью нахождения амплитуд и фаз частотных образующих сигнала, в дискретном преобразовании Фурье применяется корреляция с базовыми функциями синуса и косинуса. Спектр частот в дискретном преобразовании Фурье формируется из амплитуд синусов и косинусов, с частотами возобновления в исследуемой выборке с 0 вплоть до N/2 раз, где N – число компонентов выборки.

Преобразование Фурье раскладывает дискретизированный сигнал из N выборок в N/2 + 1 синусных и N/2 + 1 косинусных образующих. Определено, то что итог сложения 2-ух обоюдно перпендикулярных колебаний с одними и теми же частотами, но различными амплитудами предоставляет колебание с этой же частотой, однако с иной амплитудой и фазой. По этой причине позволительно отметить, то что дискретное преобразование Фурье раскладывает изучаемый сигнал согласно базисным функциям синуса и косинуса. Они считаются аналогами 2-ух обоюдно перпендикулярных колебаний, так как по фазе они сдвинуты сравнительно на 90 градусов.

Все вышеприведённые рассуждения приводят к последующим формулам дискретного преобразования Фурье:

$$ReX[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos(2\pi k i / N)$$

$$ImX[k] = -\sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin(2\pi k i / N)$$

Эти формулы показывают прямое преобразование Фурье. ReX[x] – массив, имеющий значения косинусоидальных образующих. ImX[x] – массив, имеющий значения синусоидальных образующих. Подобные обозначения внедрены в мощь комплексного представления непрерывного преобразования Фурье. Комплексная модель преобразования Фурье способен вводится с целью удобства записи 2-ух интегралов – для косинуса и синуса. Массивы Re[x] и Im[x] оформляют таким образом частотный домен (frequency domain), в то время как начальная подборка именуется временным доменом (time domain).

По приведённым ранее формулам выполняется разделение исследуемого сигнала в его спектр. Выясним сейчас свойства преобразования Фурье. Предположим, необходимо осуществить обратное преобразование – с частотных образующих создать исходный сигнал. С целью данного достоверны приведённые далее формулы:

$$x[i] = \sum_{k=0}^{N/2} Re\bar{X}[k]\cos(2\pi ki/N) + \sum_{k=0}^{N/2} Im\bar{X}[k]\sin(2\pi ki/N)$$

Коэффициенты ReX[k] и ImX[k] определяются по следующим формулам:

$$Re\bar{X}[k] = \frac{ReX[k]}{N/2}$$

$$Im\bar{X}[k] = -\frac{ImX[k]}{N/2}$$

За исключением двух случаев:

$$Re\bar{X}[0] = \frac{ReX[0]}{N}$$

$$Re\bar{X}[N/2] = \frac{ReX[N/2]}{N}$$

Такой процедура преобразования именуется синтезом либо обратным преобразованием Фурье. Отметим, то что формулы обратного преобразования подобны формулам прямого преобразования, только лишь теперь подынтегральной функцией считаются коэффициенты близ синусах и косинусах. Данное свойство считается весьма значимым и именуется двойственностью преобразования Фурье. Свойство двойственности дает возможность пояснить последующий факт: отдельный импульс в временном домене (отдельное значение одной выборки при нулевых значениях других) соответствует синусоиде и косинусоиде в частотном домене и противоположно. В другом случае всё очевидно – существует единственный коэффициент близ синуса либо косинуса – данное означает, то что исходный сигнал (выборка) включает часть одной частоты синусоидальной либо косинусоидальной формы.

Таким образом, можно точно сказать, что ряд Фурье, с момента его начала активного использования в 1822 году, обрёл широкое повсеместное применение во всех сферах научной деятельности. Применение преобразований Фурье позволяет решить важные задачи математической физики, в частности один из видов – дискретное преобразование намного упростило работу в цифровой сфере, так как сигнал стало проще обрабатывать и передавать, это объясняется тем, что дискретное преобразование позволяет разбить непрерывный периодический сигнал на сумму нескольких дискретных (имеющих конечное число значений). Это используется, например, в мобильной связи, так как звук – это непрерывная волна и её передача потребовала бы высокой скорости информационного канала, для этого используется дискретный сигнал, который имеет меньший размер по сравнению с исходным сигналом и, следовательно, может быть передан по более узкому каналу связи. Следует также не путать понятия «ряд Фурье» и «преобразование Фурье», так как преобразование Фурье используется для дискретизации квадратично-интегрируемых функций, а ряд Фурье для периодических функций либо функций, определённых в узкой области. И, ко всему прочему, дискретное преобразование Фурье, в отличии от других преобразований, представляет функцию в установленном дискретном множестве точек вместо непрерывной области. Поэтому, изучение рядов Фурье предпологается значимым для компьютерного аналмза данных, описываемых в виде функций, и должно быть обязательным при подготовке высококвалифицированного специалиста по информационным технологиям.

Библиографический список

1. Биография Жан Батист Жозеф Фурье. [Электронный ресурс] [URL]: http://to-name.ru/biography/zhan-batist-zhozef-fure.htm
2. Рудин У. Основы математического анализа 1976
3. Жук В.В., Натансон Г.И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации 1983
4. Применение преобразования Фурье в цифровой обработке звука [Электронный ресурс] [URL]: http://shackmaster.narod.ru/fourier.htm