УДК 517.5

Отображения осуществляемыми линейных функций комплексного переменного

Чжоу Валентина Юйляновна
Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема
Студент

Аннотация
Цель исследования заключается в анализе отображений, осуществляемых линейными функциями комплексного переменного, с акцентом на их геометрические свойства. В ходе работы использовалась теория функции комплексного переменного. Результатами исследования является конкретные примеры отображение линейной функций комплексного переменного.
Ключевые слова: конформное отображение, комплексные числа.

Mapping of linear functions of a complex variable

Chzhou Valentina Yuylyanovna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
Student

Abstract
The purpose of the study is to analyze the mappings performed by linear functions of a complex variable, with an emphasis on their geometric properties. In the course of the work, the theory of functions of a complex variable was used. The results of the study are specific examples of the mapping of linear functions of a complex variable.
Keywords: conformal mapping, complex numbers

1 Введение

1.1 Актуальность

Линейные функции комплексного переменного играют ключевую роль в теории комплексных функций и имеют множество применений в разделах математики, физики и других областях. Линейные функции комплексного переменного обладает множеством уникальных свойств и особенностей, которые исследуются для понимания их поведения в различных условиях.

1.2 Обзор исследований

С. Г. Светунько с помощью линейной производственной функции комплексных переменных описывает экономическое прогнозирование [1]. Д.В. Козловский рассказывает об использование комплексных переменных в прогнозировании [2]. В. П Рубана используются точные уравнения движения в терминах так называемых конформных переменных [5]. В работе

И.А.Колесников решается задача построения конформного отображения верхней полуплоскости на круговой многоугольник с нулевыми углами (углами 2π) [6].

1.3 Цель исследования

Целью статьи является изучение отображений, осуществляемых линейными функциями комплексного переменного, с подробным анализом и иллюстрацией конкретных примеров для выявления их практических применений в различных областях науки и техники.

2 Материалы и методы

Исследуются линейные функции комплексного переменного с использованием конкретных примеров для иллюстрации их геометрических и аналитических свойств. Основным материалом исследования являются линейные функции вида f(z)=az+b, где z — комплексное переменное, а a и b комплексные коэффициенты.

3 Результаты и обсуждения

Линейная функция комплексного переменного z называется функция вида

$$w = f(z) = az + b$$

где a и b – заданные комплексные числа, причем $a \neq 0$. Линейная функция определена для всех значений независимого переменного z, однозначна и т.к. обратная функция

$$z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}$$

также однозначная, она является однолистной во всей плоскости z [4]. Линейная функция аналитичная во всей комплексной плоскости, и ее производная

$$\frac{dw}{dz} = a \neq 0,$$

поэтому осуществляемое ей отображение конформно во всей плоскости. Является простейшей функцией из функции комплексного переменного.

Выполняет три вида действий:

1) Растяжение в $|a|$раз;
2) Поворот на угол arg a;
3) Сдвиг на вектор b.

Является единственной функцией, которая не меняет исходный облик отображаемого множества точек комплексной плоскости [3].

Рассмотри на конкретных примерах.

Задание №1

Найти образ круг$|z| \leq 1$ при отображении $w = 3z$ (рис.1).

 ISSN 2414-4487

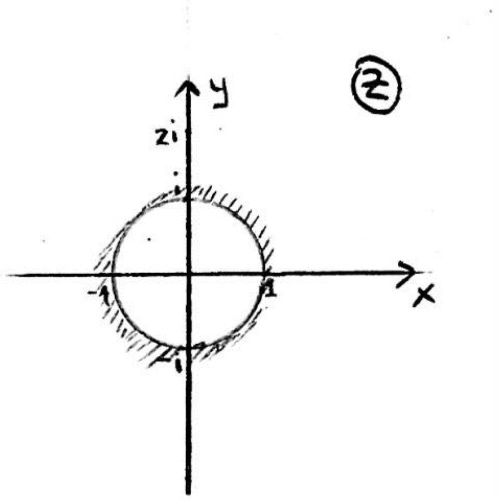


Рисунок 1 – Заданная область на плоскости z

Решение

Из условий видим:

1. Так как a=3, то |з|=3. А значит фигура растянулась в три раза;
2. arg з=0. Поэтому поворот не совершается;
3. b=0. Сдвига по происходит.

Получается, что образом круга $|z| \leq 1$ на плоскостиw будет являться круг с центом в начале координат и радиусом равном 3 (рис.2).

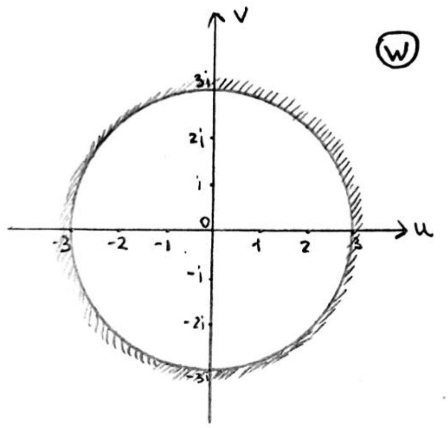


Рисунок 2 – Образ заданной области на плоскости w

Задание №2

Найти образ треугольника с вершинами в точках 0,1,i в плоскости zпри отображенииw=iz (рис.3).

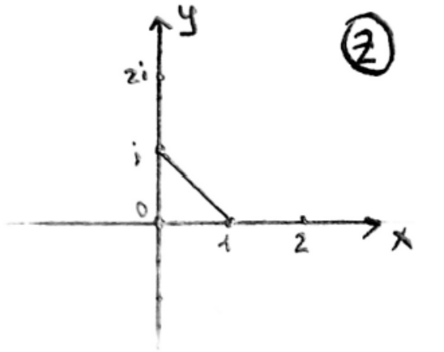


Рисунок 3 – Заданная область на плоскости z

Решение

Из условий видим:

1. Так как a=i, то $|i|$=1. А значит фигура не растягивается;
2. arg$i$=$\frac{\pi}{2}$. Поэтому совершается поворот на угол $\frac{\pi}{2}$;
3. b=0. Сдвига не происходит.

Исходя из этого образом треугольника в плоскостиz на плоскости w будет являться равный ему треугольник сделавший поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис.4).

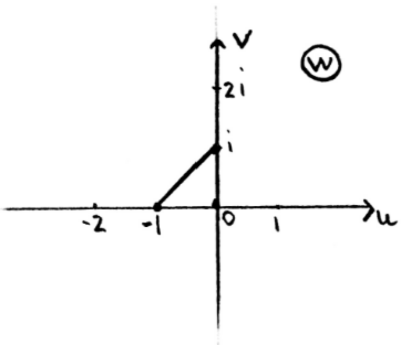


Рисунок 4 – Образ заданной области на плоскости w

Задание №3

Найти образ прямоугольника с вершинами в точках 0, 2, i, 2+i в плоскости z при отображении w=z+2+2i (рис.5).

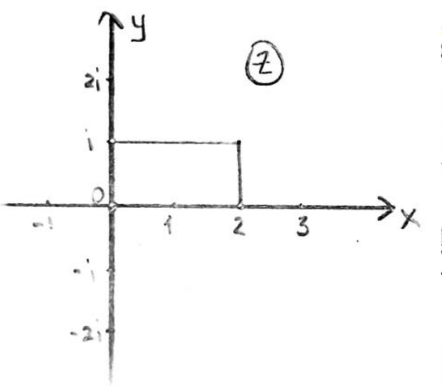


Рисунок 5 – Заданная область на плоскости z

Решение

Из условий видим:

1. Так как a=1, то |1|=1. А значит фигура не растягивается;
2. arg 1=0. Поэтому поворот не совершается;
3. b=2+2i. Сдвигается на вектор 2+2i.

Получаем, что образом прямоугольника плоскостиz на плоскостиw будет являться равный ему прямоугольник, сдвинутый на вектор b=2+2i (рис.6).

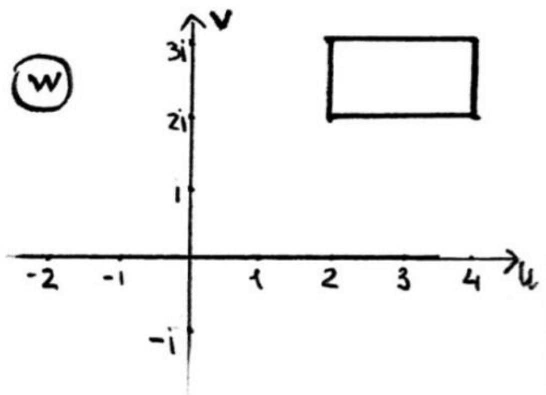


Рисунок 6 – Образ заданной области на плоскости w

Задание №4

Найти функцию, которая совершает конформное отображение полуплоскости $Im\, z < 1$ на правую полуплоскость$Re\, w > 0$ (рис.7).

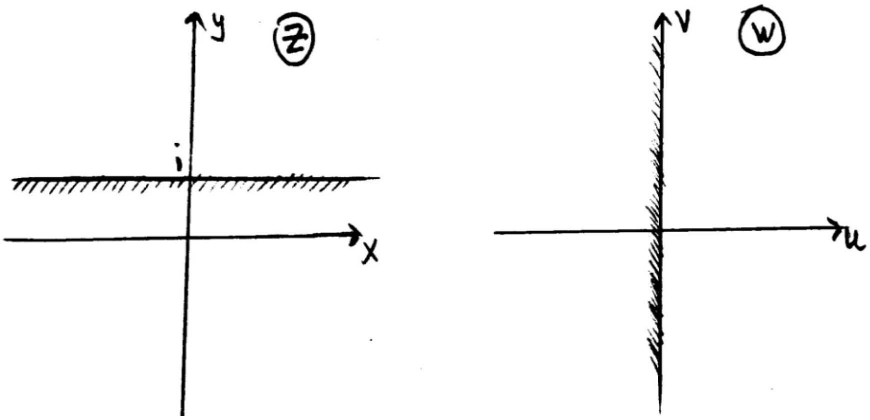


Рисунок 7– Заданные области в плоскостяхz и w

Решение:

Первым шагом сместим плоскость z на единицу вниз для того, чтобы привязать область к началу координат.

$$w_1 = z - i$$

Затем считаем плоскость w_1основной. Следует сделать поворот на $\frac{\pi}{2}$. по часовой стрелке в отрицательном направлении. Соответственно

$$a = e^{-i\pi/2} = -i$$
$$w = -i \cdot w_1$$

Для итоговой функции делаем замену $\boldsymbol{w = -i(z - i)}$

Задание №5

Найти образ области $\begin{cases} |z| \leq 1 \\ Im > 0 \end{cases}$ (рис.8) при отображении, задаваемом функцией $w = 3iz + 1 - i$.

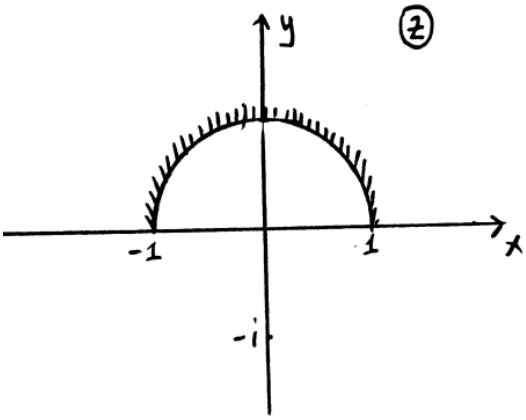


Рисунок 8 – Заданная область на плоскости z

Решение:

Дана функция $\mathrm{w} = 3\mathrm{iz} + 1 - \mathrm{i}$.

Из условий видим:

1. Так как a=3i, то $|3i|$=3. А значит фигура растянулась в 3 раза (рис.9);

2. $\arg 3i = \frac{\pi}{2}$. Поэтому совершается поворот на $\frac{\pi}{2}$ угол (рис.10);
3. $b = 1 - i$. Сдвигается на вектор $1 - i$ (рис.11).

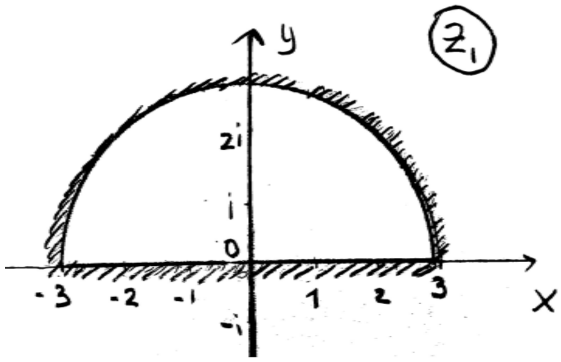


Рисунок 9 – Увеличенная область z

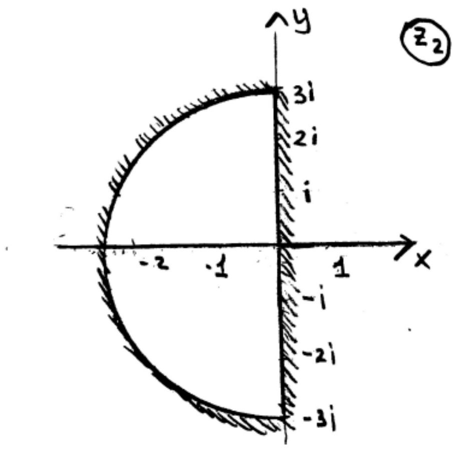


Рисунок 10 – Поворот

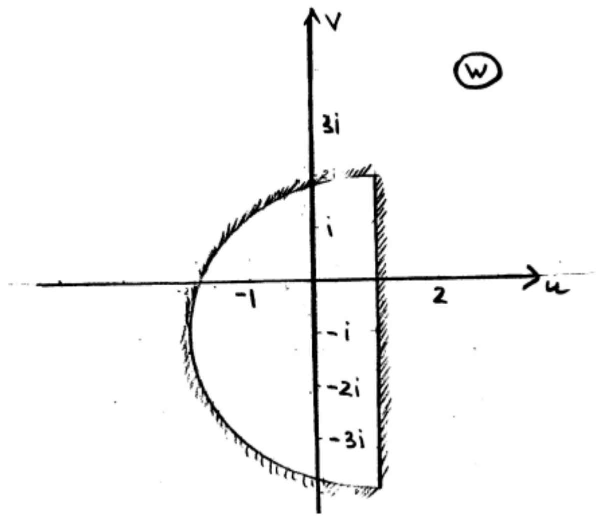
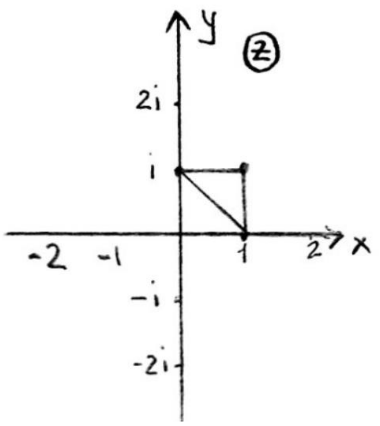


Рисунок 11 – Образ заданной области на плоскости w

Задание№6

Найти линейную функцию, отображающую с треугольник с вершинами в точках 1, i, 1 + i плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами в точках 0, 2, 2i плоскости w (рис.12).



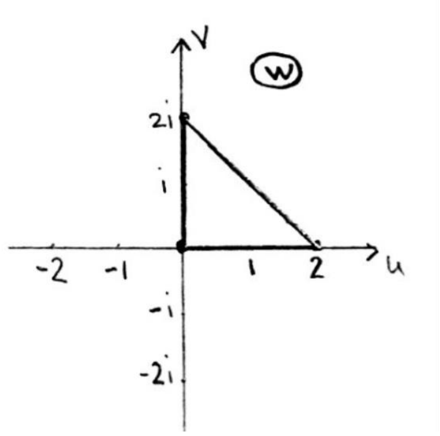


Рисунок 12 – Заданные области на плоскостях w и z

Решение:

Из рисунка 7 видно, что треугольник плоскости z переходит в треугольник плоскости w путем следующих преобразований (рис.13)

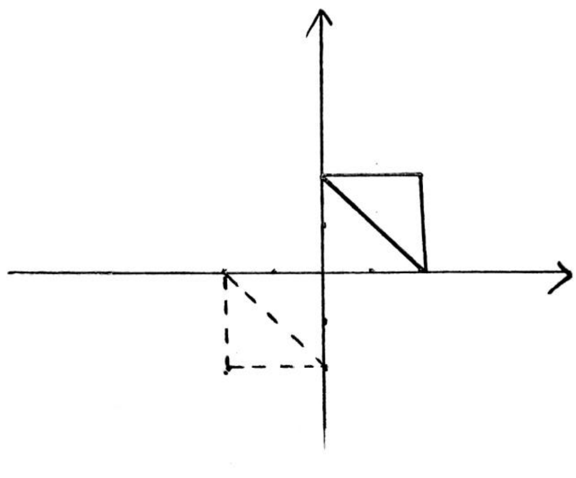


Рисунок 13 – Выполненные преобразования

1. Растяжение фигуры в в$|a| = 2$ раза;
2. Поворот на arga =π;
3. Сдвиг фигуры на вектор b =$2 + 2i$.

Учитывая, что$|a| = 2$и arg a =π=180⁰, значит $a = -2$, получаем окончательно

$$\boldsymbol{w = -2z + (2 + 2i)}$$

Выводы

В статье рассмотрены основные свойства линейных функций комплексного переменного и их отображения на комплексной плоскости. Исследование линейных функций комплексного переменного позволяет более глубоко понять их геометрическое поведение и их влияние на преобразование областей в комплексной плоскости. Особое внимание уделено их способности сохранять форму и размер малых фигур, что является следствием их конформности. На примерах было показано, как линейные функции действуют на простейшие геометрические объекты, такие как прямые и окружности, демонстрируя при этом инвариантность некоторых характеристик фигур. Эти примеры подчеркивают важность линейных отображений в приложениях, где требуется точное преобразование и сохранение структуры.

Библиографический список

1. Светуньков С. Г. Экономическое прогнозирование с помощью линейной производственной функции комплексных переменных // Вестник Оренбургского государственного университета.2010. № 8(114). С. 190-195.
2. Козловский Д. В. Использование комплексных переменных в прогнозировании // Современные проблемы математики и вычислительной техники: сборник материалов X Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 23–24 ноября 2017 года. Министерство образования Республики Беларусь, Брестский государственный технический университет; редкол.: В. А. Головко [и др.]. Брест: БрГТУ, 2017. С. 19–21.
3. Бушков С.В., Коломиец Л.В. Элементы теории функций комплексного переменного: учеб.пособие. Самара: Самар, гос. аэрокосм. ун-т., 2006. 67 с.
4. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. М.: Едиториал УРСС, 2003. 208 с.
5. Рубан В. П. Волны над искривленным дном: метод составного конформного отображения //Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2020. Т. 157, № 5. С. 944-956.
6. Колесников И. А. Конформное отображение полуплоскости на круговой многоугольник с нулевыми углами // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 6. С. 11-24.