

## Методические подходы к обучению решению логических задач в школьной математике

*Болтовский Гавриил Александрович*

*Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема*

*Студент*

### Аннотация

Целью данной статьи является анализ методических подходов к обучению решению логических задач в школьной математике. Исследованы учебные пособия из утвержденного перечня, не включенные в него учебники, задачи ЕГЭ, олимпиадные задания и другие источники. Установлено, что в учебно-методических комплексах школ представлено разнообразие логических задач, способствующих развитию критического мышления учащихся.

**Ключевые слова:** логические задачи, школьная математика, педагогические методики

## Methodological approaches to teaching logical problem solving in school mathematics

*Boltovsky Gavriil Alexandrovich*

*Sholom-Aleichem Priamursky State University*

*Student*

### Abstract

The aim of this article is to analyze methodological approaches to teaching logical problem solving in school mathematics. Textbooks from the approved list, textbooks not included in it, USE tasks, Olympiad tasks and other sources were analyzed. It was found out that school teaching and methodical complexes present a variety of logical problems that contribute to the development of students' critical thinking.

**Keywords:** logical problems, school mathematics, pedagogical methods

## 1 Введение

### 1.1 Актуальность исследования

Логические задачи играют важную роль в обучении математике, так как они способствуют развитию критического мышления, способности анализировать и интерпретировать информацию, а также улучшению навыков решения проблем. В отличие от традиционных математических задач, которые часто требуют применения формул и вычислений, логические задачи акцентируют внимание на рассуждениях и выводах, что позволяет учащимся развивать гибкость мышления и находить нестандартные подходы к решению проблем. Это особенно важно в условиях современного

образования, где акцент смещается от запоминания информации к умению работать с ней.

## 1.2 Обзор исследований

Обзор исследований, посвященных методическим подходам к обучению решению логических задач в школьной математике, опирается на анализ различных аспектов содержания учебников, олимпиадных задач и заданий ЕГЭ. М. Касымов и его соавторы в своем исследовании рассматривают школьные учебники с точки зрения формирования понятия функции, выявляя ключевые методические подходы и подчеркивая значимость логических задач в контексте изучения функций [1]. Они отмечают, что логические задачи помогают учащимся лучше понять и усвоить концепцию функции, развивая их аналитическое и критическое мышление. Р. В. Майер в своей работе [2] акцентирует внимание на определении уровня абстрактности, сложности и информативности различных тем школьного учебника физики. Хотя основное внимание уделено физике, его подход к оценке абстрактности и сложности применим и к математическим задачам. Майер подчеркивает, что логические задачи должны быть сбалансированы по сложности и информативности, чтобы способствовать эффективному обучению.

М. Г. Макаrenchенко проводит контекстуальный анализ учебных текстов по математике, выявляя, как различные задачи, включая логические, встроены в учебный процесс [3]. Он подчеркивает важность контекста в формулировке задач, что позволяет учащимся не только решать задачи, но и понимать их практическую значимость и применение. Ю. А. Дробышев и И. В. Дробышева в своем критическом анализе [4] истории математики в российских школьных учебниках подчеркивают эволюцию подходов к преподаванию и включению логических задач. Их исследование показывает, что современные учебники все больше ориентированы на развитие логического мышления учащихся через разнообразные задачи, отражающие историческое развитие математических концепций.

А. А. Попова и Л. Г. Махмутова рассматривают ведущие параметры анализа учебников по математике для младших школьников, акцентируя внимание на логических задачах как важном компоненте начального математического образования [5]. Они указывают на то, что такие задачи способствуют развитию базовых логических и аналитических навыков, необходимых для дальнейшего обучения.

Л. В. Ончукова в своей работе непосредственно посвящена логическим задачам в школьном курсе математики [6]. Она анализирует различные типы логических задач, предлагаемых в учебниках и на олимпиадах, и отмечает их роль в развитии мышления и решении нестандартных задач. Ончукова подчеркивает важность включения логических задач в учебный процесс как средства для стимуляции интеллектуальной активности и повышения интереса к математике.

Обзор исследований показывает, что логические задачи играют ключевую роль в школьном математическом образовании. Они способствуют формированию критического и аналитического мышления, помогают учащимся лучше усваивать математические концепции и развивают навыки решения нестандартных задач.

### **1.3 Цель исследования**

Целью данного исследования является анализ методических подходов к обучению решению логических задач в школьной математике.

### **1.4 Постановка задачи**

Для достижения цели исследования были поставлены следующие задачи: проанализировать учебные пособия и методические комплексы, используемые в школах для обучения решению логических задач; изучить задачи, включенные в экзаменационные материалы ЕГЭ и олимпиадные задания; оценить влияние различных методических подходов на развитие критического мышления учащихся.

## **2 Методы исследования**

В процессе исследования были использованы следующие методы: анализ содержания учебных пособий и методических комплексов, сравнительный анализ экзаменационных задач и олимпиадных заданий, а также опросы и интервью с учителями математики и учащимися для оценки эффективности различных методических подходов. Экспериментальная работа включала применение различных методик обучения решению логических задач с последующей оценкой их результатов.

## **3 Результаты и обсуждения**

Учебники по алгебре для 7-11 классов под редакцией Ю.М. Колягина отличаются богатым содержательным материалом и увлекательной подачей. Каждая глава этих учебников начинается с исторических справок и сопровождается интересными фактами, которые помогают учащимся лучше понять контекст и значение изучаемых математических понятий. В этих исторических справках приводятся различные математические факты и доказательства, иногда представленные в форме диалога ученика с учителем, что делает процесс обучения более живым и интерактивным.

Такой подход не только облегчает восприятие информации, но и стимулирует учащихся к самостоятельным рассуждениям и логическим выводам. Кроме того, в этих учебниках можно найти множество логических задач, которые требуют от учеников анализа условий и построения логических цепочек, что способствует развитию критического мышления.

На странице из учебника «Алгебра. 7 класс» [7] (Глава II Уравнения с 1 неизвестным, стр. 41) содержится задача, связанная с арифметическим решением уравнения, предложенного Пифагором. Согласно тексту, Пифагор на вопрос, сколько учеников посещает его школу, ответил:

«Половина из них изучает математику, четверть – музыку, седьмая часть пребывает в молчании, кроме того, есть еще три женщины.»

Задача состоит в определении общего числа учеников в школе Пифагора. Вообще, задача решается через составления уравнения, однако ученики ещё их не знают. Задачу можно решить без использования уравнений:

1. Определим, что половина учеников занимается математикой. Значит, это половина от общего числа.
2. Затем четверть от общего числа занимается музыкой.
3. Седьмая часть пребывает в молчании.
4. Осталось три женщины, которых прибавим к этим долям.

Пусть общее количество учеников  $N$ . Составим доли:

Математика:  $1/2$

Музыка:  $1/4$

Молчание:  $1/7$

Женщины: 3

Сложим все доли и оставшихся учеников:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{14}{28} + \frac{7}{28} + \frac{4}{28} = \frac{25}{28}$$

Остальные ученики и три женщины составляют оставшуюся часть:

$$1 - \frac{25}{28} = \frac{3}{28}$$

Так как 3 женщины составляют три двадцать восьмых от общего числа, то можно легко найти общее число учеников.  $N = 28$ .

Другие логические задачи из учебников Ю.М. Колягина и их решение можно найти в приложении. Подобные задачи содержатся в учебнике за 8 класс [8] и в учебнике за 9 класс [9].

Учебники по математике под редакцией С.М. Никольского [10-12] также включают логические задачи, однако они представлены несколько иначе. Логические задачи в этих учебниках обычно располагаются после основных заданий, что позволяет учащимся сначала закрепить основные математические навыки, а затем применить их в контексте более сложных и интересных логических задач.

Такая структура позволяет ученикам постепенно переходить от стандартных упражнений к задачам, требующим более глубокого анализа и нестандартных решений. Логические задачи в учебниках С.М. Никольского часто направлены на развитие навыков дедукции и индукции, что является важным аспектом математического образования.

Рассмотрим некоторые задачи из учебников С.М. Никольского.

Сколько раз используется каждая из цифр от 1 до 9 в записи первых 99 натуральных чисел?

Для логического решения задачи о количестве использований каждой цифры от 1 до 9 в записи первых 99 натуральных чисел необходимо рассмотреть числа по разрядам. В каждом десятке (10 чисел) каждая цифра от 1 до 9 используется ровно один раз. Поскольку таких десятков в первых 99

числах десять (с учетом чисел от 1 до 99), каждая цифра от 1 до 9 в разряде единиц используется 10 раз. В разряде десятков цифры от 1 до 9 встречаются в каждом десятке, начиная с десятка, кратного 10 (то есть 10-19, 20-29 и так далее). В каждом десятке (10 чисел) каждая цифра от 1 до 9 используется ровно один раз в каждом числе десятка. Таким образом, каждая цифра от 1 до 9 используется 10 раз в каждом десятке чисел. Суммируя количество раз использования в разряде единиц и десятков, получаем: в разряде единиц каждая цифра от 1 до 9 используется 10 раз, в разряде десятков каждая цифра от 1 до 9 используется 10 раз. Следовательно, каждая цифра от 1 до 9 используется в записи первых 99 натуральных чисел 20 раз. Таким образом, каждая из цифр от 1 до 9 используется 20 раз в записи первых 99 натуральных чисел.

Учебники Н.Я. Виленкина [13-14], которые входят в перечень одобренных учебников, выделяются особым вниманием к логическим задачам. В них логические задачи собраны в отдельные блоки, обозначаемые славянскими буквами "Веди" и "Цы". Эти блоки направлены на подготовку учащихся к олимпиадным задачам, а также на развитие памяти, внимания и воображения.

Рассмотрим логическую задачу «Веди» из учебника за 5 класс.

В лыжных соревнованиях Таня, Оля, Ира, Катя, Лена и Женя заняли места со второе по седьмое. Катя на 4 с. отстала от победительницы и на 2 с. от Иры, но обогнала Женю на 3 с. Оля на 4 с. отстала от Жени, но обогнала Таню на 1 с., Лена отстала от Тани на 2 с. Какие места заняли девочки и на сколько позже победительницы финишировали.

Для решения задачи логически, начнем с анализа данных по временам и позициям. У нас есть семь участниц: Таня, Оля, Ира, Катя, Лена и Женя, а также неназванная участница, занявшее первое место.

Катя на 4 секунды отстала от победительницы, что значит, что победительница финишировала на 4 секунды раньше Кати. Катя также на 2 секунды отстала от Иры, что значит, что Ира финишировала на 2 секунды раньше Кати. Катя обогнала Женю на 3 секунды, что значит, что Женя финишировала на 3 секунды позже Кати.

Оля на 4 секунды отстала от Жени, что значит, что Женя финишировала на 4 секунды раньше Оли. Оля обогнала Таню на 1 секунду, что значит, что Таня финишировала на 1 секунду позже Оли. Лена отстала от Тани на 2 секунды, что значит, что Лена финишировала на 2 секунды позже Тани.

Теперь соберем всю информацию и попробуем распределить участниц по местам. У нас есть следующие соотношения времени финиша:

- Катя отстала от победительницы на 4 секунды.
- Ира финишировала на 2 секунды раньше Кати.
- Женя финишировала на 3 секунды позже Кати.
- Оля финишировала на 4 секунды позже Жени.
- Оля обогнала Таню на 1 секунду.
- Лена финишировала на 2 секунды позже Тани.

Итак, давайте предположим, что Ира финишировала первой, так как Ира финишировала на 2 секунды раньше Кати, которая на 4 секунды позже победительницы. Значит, Ира финишировала на 2 секунды раньше Кати. Таким образом, Ира заняла второе место.

Катя финишировала на 4 секунды позже Иры, так что Катя на втором месте. Женя финишировала на 3 секунды позже Кати, что ставит Женю на третье место. Оля на 4 секунды позже Жени, что ставит Олю на четвертое место.

Теперь у нас есть:

1. Ира
2. Катя (4 секунды позже)
3. Женя (7 секунд позже)
4. Оля (11 секунд позже)

Оля обогнала Таню на 1 секунду, что ставит Таню на 5-е место, так как Таня финишировала на 1 секунду позже Оли. Лена финишировала на 2 секунды позже Тани, что ставит Лену на 6-е место. Остается только одно место, и это место занимает последняя участница, которая еще не упомянута – это Женя.

Итак, итоговые результаты:

1. Неназванная участница;
2. Ира;
3. Катя;
4. Женя;
5. Оля;
6. Таня;
7. Лена.

Теория, представленная в учебниках Ю.Н. Макарычева [15-17], ограничивается только формальными математическими сведениями, такими как правила, формулы и теоремы. В учебнике нет задач, требующих анализа и интерпретации условий, что значительно сужает возможности для развития логического мышления у учащихся. Иногда в учебнике можно встретить информацию о великих людях в математике, но эти сведения не связаны напрямую с решением задач и не способствуют развитию навыков логического мышления.

В учебнике по вероятности и статистике авторства И.Р. Высоцкого [18] логические задачи встречаются только в некоторых темах, таких как графы и диаграммы Эйлера.

Рассмотрим задачу на графы, предложенную в учебнике.

Два чёрных и два белых коня стоят в углах шахматной доски  $3 \times 3$ , чёрные сверху, а белые снизу. Можно ли, передвигая их по шахматным правилам, поставить белых коней в два противоположных угла, а чёрных – в два других противоположных угла (рис. 1)?

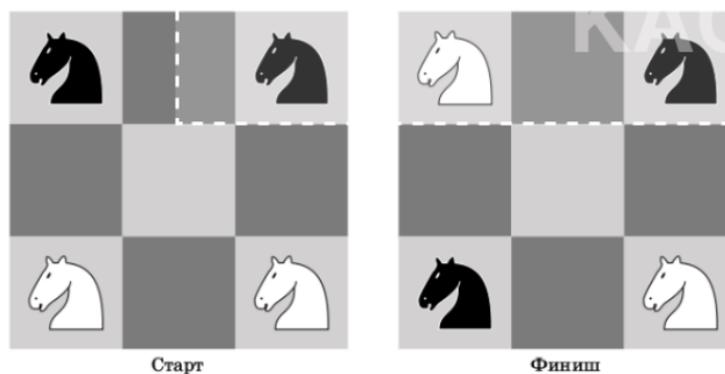


Рисунок 1 – Задача на графы

Обозначим поля шахматной доски  $3 \times 3$  буквами и построим граф игры. Поля изобразим вершинами, если из одного поля ходом коня можно попасть в другое поле, то соответствующие вершины свяжем ребром. Кони изображены рядом с теми вершинами, в которых они находятся в начале (рис. 2).

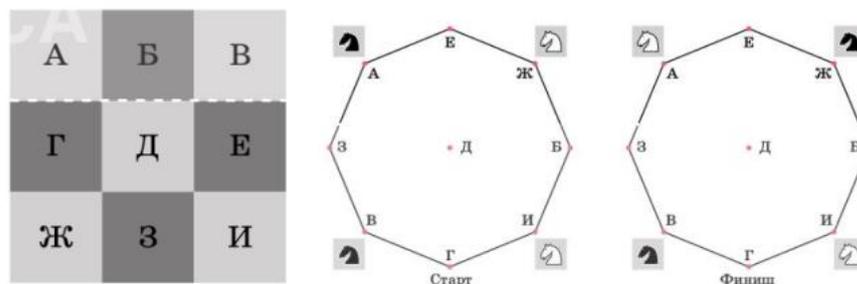


Рисунок 2 – Составление графа по условию задачи

Вопрос теперь стоит иначе: можно ли передвинуть коней вдоль рёбер графа из положения «Старт» в положение «Финиш»? На старте два белых коня рядом, и два чёрных тоже рядом; а на финише цвета коней чередуются. Чтобы пройти от старта к финишу, в какой-то момент придётся поставить белого и чёрного коня на одно и то же поле, а это не разрешается шахматными правилами.

Ответ: нельзя.

Логические задачи олимпиадного уровня представляют собой особую категорию задач. Эти задачи часто включают элементы головоломок и требуют от участников олимпиады применить творческий подход для их решения.

Логические задачи, встречающиеся на математических олимпиадах, бывают следующих наиболее популярных типов:

1. Нахождение соответствий между множествами. Эти задачи требуют от учащихся установления определённых соответствий между элементами различных множеств на основе заданных условий.

2. О лжецах и тех, кто говорит правду. Задачи этого типа предполагают анализ утверждений, сделанных различными персонажами, и установление,

кто из них говорит правду, а кто лжет, на основе логических связей между утверждениями.

3. Фальшивые монеты и взвешивания. В этих задачах необходимо определить фальшивую монету среди набора монет, используя минимальное количество взвешиваний на равноплечих весах.

4. Переливания. Задачи на переливания предполагают достижение определенного объема жидкости в одном или нескольких сосудах, используя ограниченное количество действий.

5. Переправы. В задачах на переправы требуется переместить группу людей или объектов с одного берега на другой, соблюдая при этом определенные условия.

Такие задачи часто решаются с использованием таблиц. Существуют сборники разных авторов, посвященные олимпиадным задачам [19-22].

Особое место среди задач в ЕГЭ занимает задача под номером 21, которая является классическим примером логической задачи. Эта задача требует от учащихся не просто вычислений, но и умения логически рассуждать, анализировать данные и делать правильные выводы.

В корзине лежит 40 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 17 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 25 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Рассмотрим решение задачи.

1. Обозначим количество рыжиков через  $x$ , а количество груздей через  $y$ . Тогда  $x+y=40$ .
2. Нам известно, что среди любых 17 грибов есть хотя бы один рыжик. Это значит, что если бы количество рыжиков было меньше 24, то мы могли бы выбрать 17 грибов, которые все были бы груздями, что противоречит условию. Следовательно,  $x \geq 24$ .
3. Аналогично, среди любых 25 грибов должен быть хотя бы один груздь. Это значит, что если бы количество груздей было меньше 16, то мы могли бы выбрать 25 грибов, которые все были бы рыжиками, что также противоречит условию. Следовательно,  $y \geq 16$ .
4. Суммируя найденные неравенства:  $x \geq 24$  и  $y \geq 16$ , и учитывая, что  $x+y=40$ , мы видим, что  $x=24$  и  $y=16$ .

Таким образом, в корзине 24 рыжика и 16 груздей.

Эти задачи связаны с анализом числовых данных и нахождением закономерностей. Банк заданий ЕГЭ базового уровня представлен на сайте «Решу ЕГЭ» [23].

Шахматные логические задачи являются уникальным и наглядным видом логических задач, который сочетает элементы стратегии, аналитического мышления и творческого подхода. Эти задачи требуют от учащихся не только глубоких знаний правил шахмат, но и умения прогнозировать ходы, анализировать позиции и находить оптимальные решения в ограниченных условиях. Книгу, посвященную шахматным задачам, написал Е.Я. Гик, она называется «Шахматы и математика» [24]. В приложении представлена шахматная задача с решением.

Шахматные задачи обладают яркой междисциплинарностью. Они часто используются не только в шахматных учебниках и тренингах, но и в курсах по программированию, где служат инструментом для развития алгоритмического мышления.

Шахматные задачи могут варьироваться от простых до крайне сложных, охватывая различные аспекты игры, такие как движение фигур, манипуляции с доской и другие.

Анализ различных методических материалов показывает, что учебники по математике могут использовать логические задачи для развития у учащихся аналитических и критических навыков. Олимпиадные задачи и задачи ЕГЭ подчеркивают важность подготовки учащихся к решению сложных и нестандартных проблем. Шахматные задачи, благодаря своей наглядности и междисциплинарности, могут быть внедрены в образовательный процесс.

Включение разнообразных логических задач в учебные программы по математике способствует всестороннему интеллектуальному развитию учащихся и их готовности к решению разнообразных задач в будущей профессиональной деятельности.

### **3. Выводы**

Таким образом, было установлено, что учебно-методические комплексы школ содержат разнообразные логические задачи, которые способствуют развитию критического мышления учащихся.

### **Библиографический список**

1. Касымов М. Анализ школьных учебников с точки зрения формирования понятия функции // *Quality of teacher education under modern challenges*. 2023. Т. 1. №. 1. С. 380-383.
2. Майер Р. В. Определение уровня абстрактности, сложности и информативности различных тем школьного учебника физики // *Стандарты и мониторинг в образовании*. 2013. №. 6. С. 19-27.
3. Макаренченко М. Г. Контекстуальный анализ учебных текстов по математике // *Известия Российского государственного педагогического университета им. АИ Герцена*. 2008. №. 71. С. 268-275.
4. Дробышев Ю. А., Дробышева И. В. История математики в российских школьных учебниках: критический анализ // *Вестник Набережночелнинского государственного педагогического университета*. 2021. №. S2. С. 76-78.
5. Попова А. А., Махмутова Л. Г. Ведущие параметры анализа учебников по математике для младших школьников // *Человек. Спорт. Медицина*. 2006. №. 9 (64). С. 93-96.
6. Ончукова Л. В. Логические задачи в школьном курсе математики // *Концепт*. 2012. №. 12 (16). С. 106-118.
7. Колягин Ю.М. Алгебра. 7 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2012. 319 с.

8. Колягин Ю.М. Алгебра. 8 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2013. 336 с.
9. Колягин Ю.М. Алгебра. 9 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2014. 304 с.
10. Никольский С.М. Математика 5 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2015. 272 с.
11. Никольский С.М. Математика 6 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2015. 256 с.
12. Никольский С.М. Математика 7 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2013. 287 с.
13. Виленкин Н.Я. Математика. 5 класс. Учеб. для общеобразовательных организаций в 2 ч. М.: Просвещение, 2022. 158 с.
14. Виленкин Н.Я. Математика. 6 класс. Учеб. для общеобразовательных организаций в 2 ч.. М.: Просвещение, 2023. 160 с.
15. Макарычев Ю.Н. Математика. Алгебра: 7-й класс: базовый уровень: учебник. М.: Просвещение, 2023. 255 с.
16. Макарычев Ю.Н. Математика. Алгебра: 8-й класс: базовый уровень: учебник. М.: Просвещение, 2023. 319 с.
17. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2017. 287 с.
18. Высоцкий И.Р. Математика. Вероятность и статистика. 7-9 классы, базовый уровень, учебник в 2 частях. М.: Просвещение, 2023. 177 с.
19. Бугаенко В.О. Математический кружок. 9 класс. Методическая разработка вечернего отделения МММФ. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ и центра прикладных исследований, 2000. 72 с.
20. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2004. 560 с.
21. Дориченко С.А., Яценко И.В. LVIII Московская математическая олимпиада: сборник подготовительных задач. М.: ТЕИС, 1994. 61 с.
22. Спивак А.В. Математический кружок. 6-7 классы. М.: Посев, 2003. 128 с.
23. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». URL: <https://www.oge.sdangia.ru/>
24. Гик Е.А. Шахматы и математика. М.: Наука, 1983. 176 с.