УДК 517.5

Отображения осуществляемыми дробно – линейной функцией комплексного переменного

Чжоу Валентина Юйляновна
Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема
Студент

Аннотация
В данной статье рассматриваются отображения, осуществляемые дробно-линейными функциями комплексного переменного, с акцентом на их геометрические свойства. Исследование базируется на теории функций комплексного переменного и анализе линейных преобразований в комплексной плоскости. Приведены конкретные примеры отображений, демонстрирующие преобразования окружностей и прямых линий в комплексной плоскости, что позволяет лучше понять поведение данных функций и их применение в различных областях математики и физики.
Ключевые слова: конформное отображение, комплексные числа.

Mappings performed by a fractional linear function of a complex variable

Chzhou Valentina Yuylyanovna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
Student

Abstract
This article discusses the mappings performed by fractional linear functions of a complex variable, with an emphasis on their geometric properties. The research is based on the theory of functions of a complex variable and the analysis of linear transformations in the complex plane. Specific examples of mappings demonstrating transformations of circles and straight lines in the complex plane are given, which makes it possible to better understand the behavior of these functions and their application in various fields of mathematics and physics.
Keywords: conformal mapping, complex numbers

1 Введение

1.1 Актуальность

Актуальность исследования, посвященного отображениям, осуществляемым дробно-линейными функциями комплексного переменного, обусловлена их значительной ролью в различных областях математики и её приложений. Дробно-линейные функции, являются основными инструментами в комплексном анализе, теории конформных отображений и геометрической функции теории. Они находят применение в физике, особенно в квантовой механике и теории относительности.

1.2 Обзор исследований

С. Г. Светунько с помощью линейной производственной функции комплексных переменных описывает экономическое прогнозирование [1]. Д.В. Козловский рассказывает об использование комплексных переменных в прогнозировании [2]. В. П Рубана используют точные уравнения движения в терминах так называемых конформных переменных [5]. А в работе И. А. Колесников решается задача построения конформного отображения верхней полуплоскости на круговой многоугольник с нулевыми углами (углами 2π) [6].

1.3 Цель исследования

Целью статьи является изучение отображений, осуществляемых дробно-линейными функциями комплексного переменного, с подробным анализом и иллюстрацией конкретных примеров для выявления их практических применений в различных областях науки и техники.

2 Материалы и методы

В данной статье исследуются отображения, осуществляемые дробно-линейными функциями комплексного переменного, с использованием конкретных примеров для иллюстрации их геометрических и аналитических свойств. Основное внимание уделяется функциям вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

где z — комплексное переменное, а где a, b, c, d- заданные комплексные числа, причем

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

3 Результаты и обсуждения

Основные свойства дробно-линейной функции:

1) **Круговое свойство:** окружности и прямые, не проходящие через точку $z = -\frac{d}{c}$,отображаются в окружности, а окружности и прямые, проходящие через эту точку, в прямые.
2) **Свойство сохранения симметрии:** точки, симметричные относительно окружности или прямой, переходят в точки, симметричные относительно образа этой окружности или прямой.
3) **Определение функции через три различные точки:** каковы бы не были три различные точки z_1, z_2, z_3 на плоскости z и три различные точки w_1, w_2, w_3 на плоскости w существует единственное дробно-линейное преобразование, которое переводит точки z_kв точки w_k (k=1,2,3). Найти указанное преобразование можно используя формулу

$$\frac{\boldsymbol{w_3 - w_2}}{\boldsymbol{w_3 - w_2}} \cdot \frac{\boldsymbol{w - w_1}}{\boldsymbol{w - w_2}} = \frac{\boldsymbol{z - z_1}}{\boldsymbol{z - z_2}} \cdot \frac{\boldsymbol{z_3 - z_2}}{\boldsymbol{z_3 - z_1}}$$

Задание №1

Найти образ окружности $|z+i|=\frac{1}{3}$ при отображении $w=\frac{z-i}{3z+2i}$.

Решение:

Построим окружность в плоскости z (рис.1)

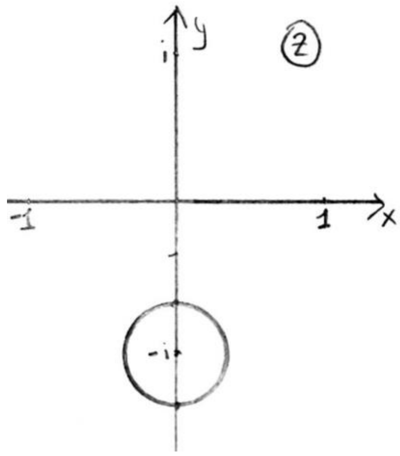

Рисунок 1– Заданная область на плоскости z

Так она проходит через точку $z=-\frac{2}{3}i$, а $w=\frac{z-i}{3z+2i}$образ окружности проходит через$w=\infty$,по круговому свойству эта окружность перейдет в прямую. Для поиска отображения достаточно найти образ двух точек, лежащих на окружности.

$$w\left(\frac{1}{3}-i\right)=\frac{\frac{1}{3}-i-i}{3\left(\frac{1}{3}-i\right)+2i}=\frac{7}{6}+\frac{5i}{6}$$

$$w\left(-\frac{4}{3}i\right)=\frac{-\frac{4}{3}i-i}{3\left(-\frac{4}{3}i\right)+2i}=\frac{7}{6}$$

Через полученные точки проводим прямую (рис.2).

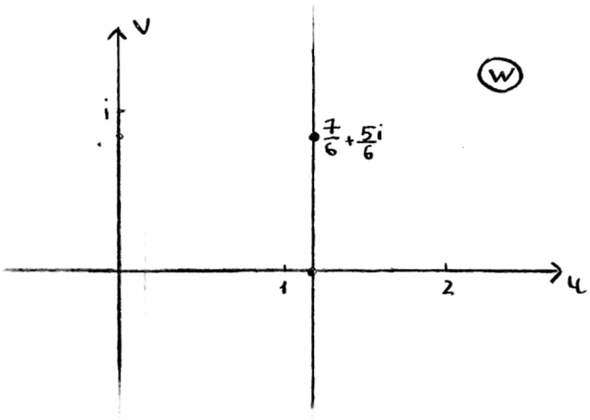

Рисунок 2 – Образ заданной области на плоскости w

Задание №2

Найти образ заданной области $Im\,z>1$ при отображении$w=\frac{1}{z}$ (рис.3).

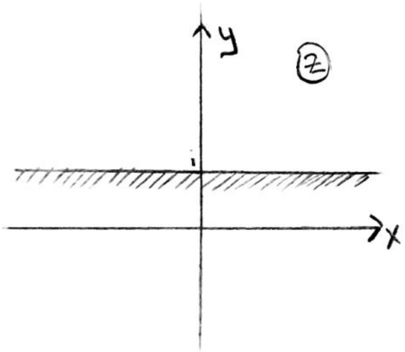

Рисунок 3— Заданная область на плоскости z

Решение

Решим данное задание алгебраическим способом.

Из условий $Im\,z > 1$ можно перейти к $y > 1$. Затем из заданного равенства $w = \frac{1}{z}$ выражаем z через w. Получаем $z = \frac{1}{w}$. После записываем ziw через в алгебраической форме

$$x + iy = \frac{1}{u + iv}$$

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} \cdot \frac{u - iv}{u - iv}$$

$$x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$$

После приравниваем мнимые части

$$y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

Тогда получаем

$$\frac{-v}{u^2 + v^2} > 1$$

Домножаем обе части на положительный знаменатель

$$-v > u^2 + v^2$$

Переносим в одну сторону

$$u^2 + v^2 + v < 0$$

Приводим к каноническому виду

$$u^2 + \left(v^2 + 2v\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}$$

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

Получаем окружность с центром в точке $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $= \frac{1}{2}$

Поскольку стоит знак < то наша область находится внутри окружности (рис.4).

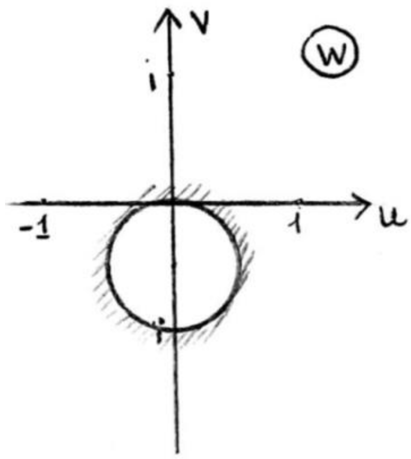

Рисунок 4 — Образ заданной области на плоскости w

Задание №3

Найти образ области $\begin{cases} Re\,z = 0 \\ Im\,z = 0 \\ |z - (1+i)| = 1 \end{cases}$ (рис.5) при отображение задаваемом функцией $w = \frac{z+1}{z-1}$ [3].

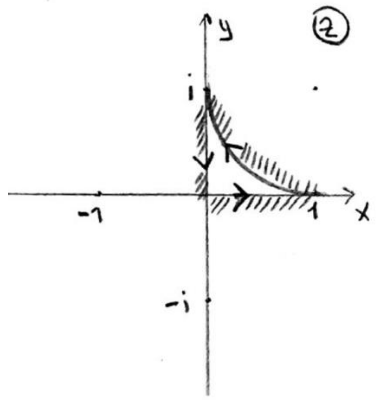

Рисунок 5— Заданная область на плоскости z

Решение

В точкеz=1 знаменатель дроби обращается в 0. Это точка лежит на дуге окружности и горизонтальном участке границы фигуры, по свойству они будут отражаться в прямые. А вертикальный участок отобразится в дугу окружности. Будем преобразовывать участки границы фигуры по отдельности. Для этого необходимо взять любые три точки, принадлежащие каждому отдельному участку и найти их образы

Таблица 1 —$Im\,z = 0$

z	**w**
i	$-i$

0	-1
∞	1

Так как ∞ не принадлежит заданному участку, выбираем дугу окружности от -i до -1которая не проходит через точку 1(Рис.6).

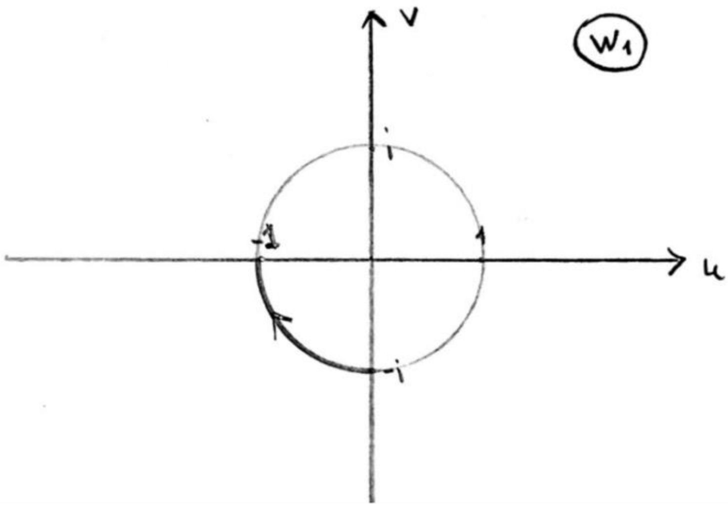

Рисунок 6 – Отображение участка $Im\ z$ на плоскость w

Таблица 2 – $Re\ z\ = 0$

z	w
0	-1
$\frac{1}{2}$	-3
1	∞

Таблица 3– $z\ - (1 + i) = 1$

z	w
1	∞
i	$-i$
$1 + 2i$	$-i + 1$

Так как точка$1 + 2i$ не принадлежит заданному участку, то и точка $-i + 1$ не будет являться точкой образа (Рис.7).

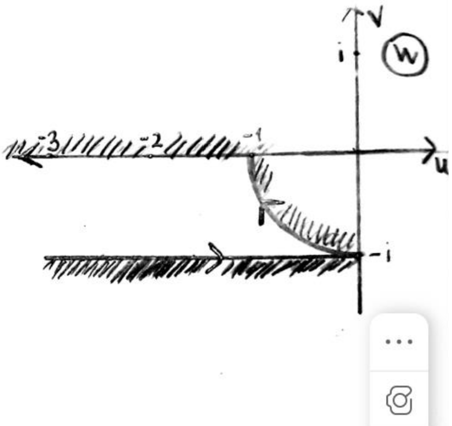

Рисунок 7 — Образ заданной области на плоскости w

Задание №4

Отобразить треугольник с вершинами $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = 1$с помощью функции $w = \frac{1}{z}$ (рис.8).

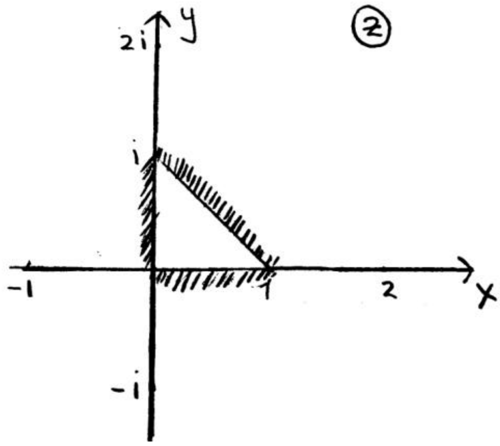

Рисунок 8 — Заданная область на плоскости z

Решение

Обозначим стороны треугольника черезl_1, l_2, l_3. Сторона l_1 отобразится в $L_1 = [0, +\infty)$— часть действительной оси, а l_3 перейдёт в луч $L_3 = [-i, -i\infty)$мнимой оси. По круговому свойству образом прямой, которой принадлежитl_2, является окружность L_2, поскольку указанная прямая не проходит через точку z = 0, образом которой является точка w = ∞ (рис.9).

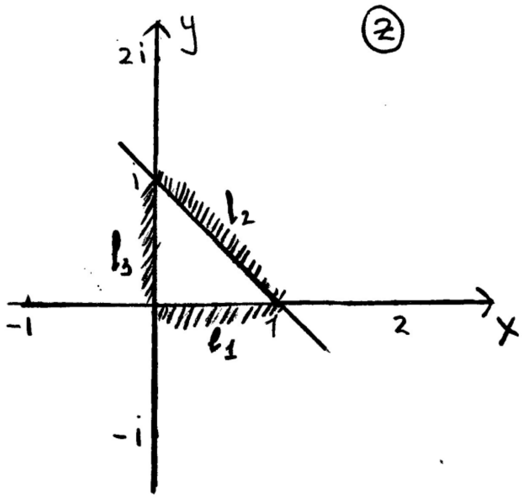

Рисунок 9 — Треугольник с обозначенными сторонами

Таблица 4 – Находим образы точек

z	w
1	1
i	$-i$
∞	0

Через полученные точки w можно провести единственную окружность. Образомl_2 будет полуокружность L_2 , не содержащая точки w =0, так как она есть образ z $=\infty$, не принадлежащая l_2 . При обходе границыl_2от $z_1 = 1, z_2 = -i$область лежит слева. Значит при обходе L_2 от w_1,=1 к $w_2 = i$образ области должна быть слева от L_1(рис.10).

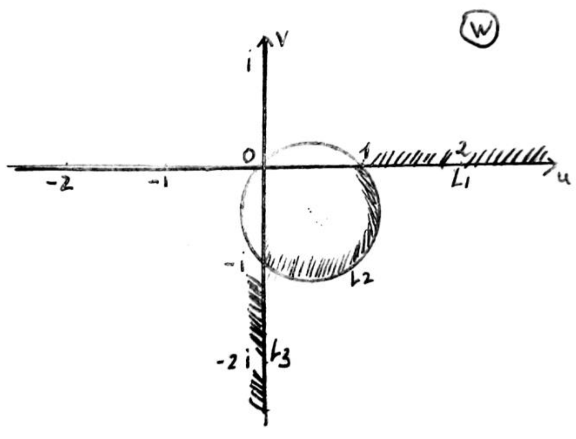

Рисунок 10 — Образ заданной области на плоскости w

Задание №5

Отобразить $Im\, z > 0$ в $|w| < 1$

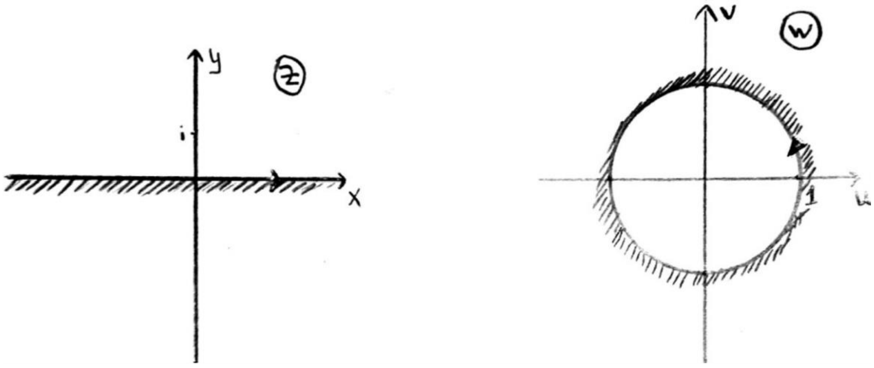

Рисунок 5 — Задание

Решение

Чтобы найти дробно-линейную функцию выбираем 3 точки плоскости z и 3 точки плоскости w, затем подставляем их координаты в формулу и находим функцию w.

Таблица 5 – Находим образы точек

z	w
0	1
1	i
∞	-1

Теперь подставляем наши точки в формулу для определения функции через три различные точки.

$$\frac{z-0}{z-1}\frac{\infty-1}{\infty-0}=\frac{w-1}{w-i}\frac{-1-i}{-1-1}$$

$$\frac{z}{z-1}=\frac{w-1}{w-i}\frac{1+i}{2}$$

перемножаем по свойству пропорций, раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые и решаем уравнение

$$2z(w-i)=(1+i)(z-1)(w-1)$$

$$2z(w-i)=(z-1+iz-i)(w-1)$$

$$2wz-2iz=zw-z-w+1+izw-iz-iw+i$$

$$zw+w-izw+iw=iz-z+1+i$$

получаем

$$w=\frac{(i-1)z+1+i}{(1-i)z+1+i}$$

Преобразуем в более простую форму

$$w=\frac{(i-1)z+i(1-i)}{(1-i)z+i(1-i)}$$

Сокращаем на $(1-i)$

$$\boldsymbol{w=\frac{i-z}{i+z}}.$$

Выводы

В результате проведенного исследования отображений, осуществляемых дробно-линейными функциями комплексного переменного, выявлены и проанализированы их ключевые геометрические и аналитические свойства. Рассмотрение функций вида $w = \frac{az+b}{cz+d}$, показало, что такие отображения сохраняют углы и преобразуют окружности и прямые в другие окружности или прямые, что подтверждает их конформность. Конкретные примеры, приведенные в работе, иллюстрируют, как параметры a, b, c и d влияют на форму и расположение образов исходных фигур. Полученные результаты способствуют углубленному пониманию поведения дробно-линейных функций и подтверждают их значимость в изучении конформных отображений и геометрических преобразований в комплексной плоскости

Библиографический список

1. Светуньков, С. Г. Экономическое прогнозирование с помощью линейной производственной функции комплексных переменных // Вестник Оренбургского государственного университета.2010. № 8(114). С. 190-195.
2. Козловский, Д. В. Использование комплексных переменных в прогнозировании / Современные проблемы математики и вычислительной техники : сборник материалов X Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 23–24 ноября 2017 года // Министерство образования Республики Беларусь, Брестский государственный технический университет ; редкол.: В. А. Головко [и др.]. Брест: БрГТУ, 2017. С. 19–21.
3. Бушков С.В., Коломиец Л.В. Элементы теории функций комплексного переменного: учеб.пособие. Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т., 2006. 67с.
4. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. Едиториал УРСС, 2003. 208 с.
5. Рубан В. П. Волны над искривленным дном: метод составного конформного отображения //Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2020. Т. 157, № 5. С. 944-956.
6. Колесников И. А. Конформное отображение полуплоскости на круговой многоугольник с нулевыми углами // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 6. С. 11-24.