

Отображения осуществляемыми степенной функцией комплексного переменного

Чжоу Валентина Юйляновна

Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема

Студент

Аннотация

Цель исследования заключается в анализе отображений, осуществляемых степенной функцией комплексного переменного, с акцентом на их геометрические свойства. В ходе работы использовались методы теории функций комплексного переменного для изучения поведения и характеристик данных отображений. Результатами исследования являются конкретные примеры отображений, иллюстрирующие влияние степени функции на геометрическую структуру образа.

Ключевые слова: конформное отображение, комплексные числа.

Mappings performed by a power function of a complex variable

Chzhou Valentina Yuylyanovna

Sholom-Aleichem Priamursky State University

Student

Abstract

The purpose of the study is to analyze the mappings performed by a power function of a complex variable, with an emphasis on their geometric properties. In the course of the work, methods of the theory of functions of a complex variable were used to study the behavior and characteristics of these maps. The results of the study are specific examples of mappings illustrating the effect of the degree of function on the geometric structure of the image.

Keywords: conformal mapping, complex numbers

1 Введение

1.1 Актуальность

Актуальность исследования обусловлена широким применением теории функций комплексного переменного в различных областях математики и физики. Понимание геометрических свойств отображений, осуществляемых степенными функциями, важно для анализа и решения задач в инженерии, динамических системах и теории управления.

1.2 Обзор исследований

С. Г. Светунько с помощью линейной производственной функции комплексных переменных описывает экономическое прогнозирование [1]. А

Д. В. Козловский рассказывает об использовании комплексных переменных в прогнозировании [2]. В. П. Рубан использует точные уравнения движения в терминах так называемых конформных переменных [5]. А в работе И.А. Колесников решается задача построения конформного отображения верхней полуплоскости на круговой многоугольник с нулевыми углами (углами 2π) [6].

1.3 Цель исследования

Цель исследования заключается в анализе геометрических свойств отображений, осуществляемых степенной функцией комплексного переменного.

2 Материалы и методы

Исследуются степенной функции комплексного переменного с использованием конкретных примеров для иллюстрации их геометрических и аналитических свойств. Основным материалом исследования являются степенная функция вида $W = Z^n$, где z — комплексное переменное, а $n \in \mathbb{N}$.

3 Результаты и обсуждения

Для того чтобы отображение $w = z^n$ было однолиственным в области D , необходимо и достаточно чтобы область D не содержала двух точек z_1 и z_2 , у которых модули равны, а аргументы отличаются на число кратное $\frac{2\pi}{n}$.

Задание №1

Отобразить заданную область с помощью функции $w = z^2$ (рис.1) [2].

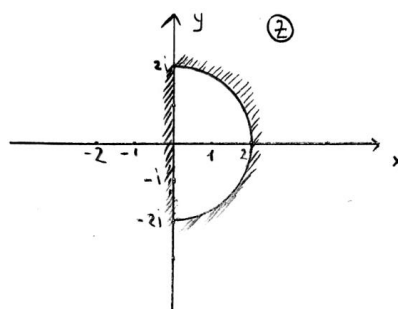


Рисунок 1 — Заданная область на плоскости z

Для заданного полукруга $\begin{cases} |z| \in [0, 2] \\ \arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ применим функцию, получаем для образа $\begin{cases} |w| \in [0, 4] \\ \arg w \in [-\pi, \pi] \end{cases}$. То есть в плоскости w получим круг радиуса 2 с разрезом по отрицательной части действительной оси (рис.2).

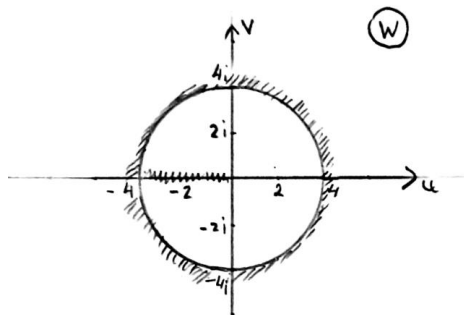


Рисунок 2 — Образ заданной области на плоскости w

Задание №2

Найти функцию $w = f(z)$, которая взаимно однозначно и конформно отображает область $D = \{z: -\frac{\pi}{6} < \arg(z - i) < \frac{\pi}{3}\}$ плоскости z на верхнюю полуплоскость $G: \operatorname{Im} w > 0$ в плоскости w (рис.3) [2].

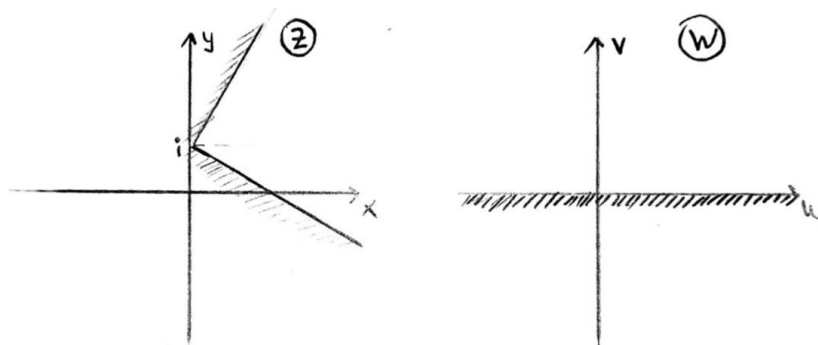
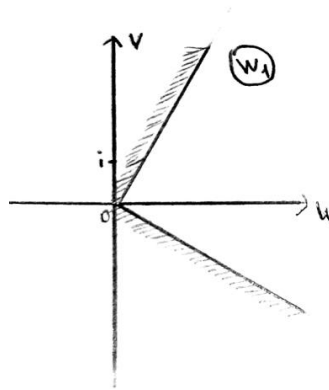


Рисунок 3 — Задание

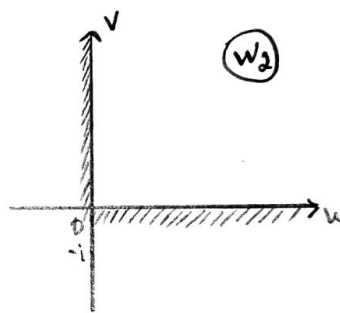
Решение

- 1) Сдвигаем заданную область D на вектор $b = -i$.
 $w_1 = z - i$ (рис.4)

Рисунок 4 — Сдвиг на вектор $b = -i$

2) Поворачиваем область D на угол $= \frac{\pi}{6}$ против часовой стрелки вокруг начала координат

$$w_2 = w_1 e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ (рис.5)}$$

Рисунок 5 — Поворот на угол $= \frac{\pi}{6}$

3) Увеличиваем угол в 2 раза

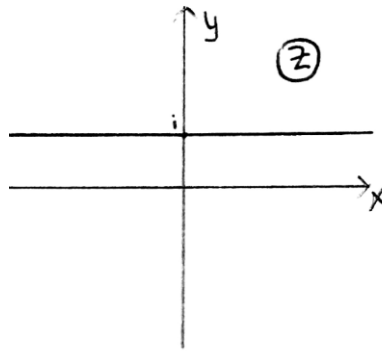
$$w = w_2^2$$

Делаем подстановку

$$w = (z - i)^2 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Задание №3

Найти образ прямой $\text{Im } z = 1$ при отображении с помощью функции $w = z^2$

Рисунок 6— Заданная область на плоскости z **Решение**

Имеем $\text{Im } z = 1$, что означает, мнимая часть z равна 1. Представим z в виде $z = x + i$, где x -действительная часть, а i - мнимая единица

Подставляем z в $w = z^2$

$$w = (x + i)^2 = x^2 + 2ix - 1$$

Выписываем действительную и мнимую часть

$$\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases}$$

Отсюда следует

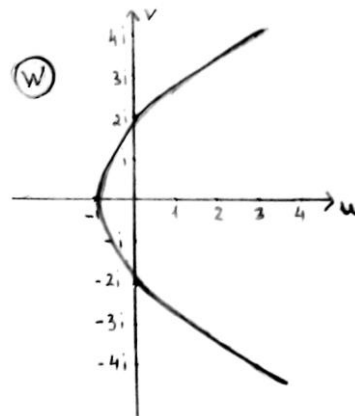
$$u = \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 1$$

Получаем функцию вида

$$u = \frac{1}{4}v^2 - 1$$

Таблица 1 —Возьмем пять точек и найдем их значения

v	u
0	-1
$\pm 2i$	0
$\pm 4i$	3

Рисунок 7 — Образ заданной области на плоскости w **Задание №4**

Отобразить область $\text{Im } z < 0$ с помощью функции $w = \sqrt[4]{z}$

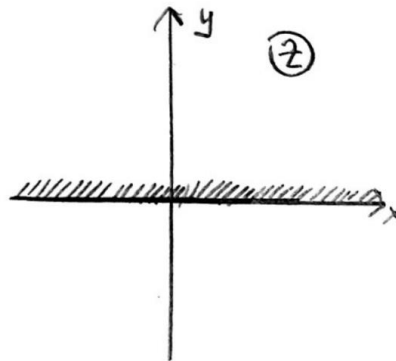


Рисунок 8 — Заданная область на плоскости z

Решение

Для решение этого задания необходимо определить диапазон значений для модуля и аргумента точек заданной области и точек образа.

$$\begin{cases} |z| \in [0; \infty) \\ \arg z \in [\pi; 2\pi] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w \in [0; \infty) \\ w \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \end{cases}$$

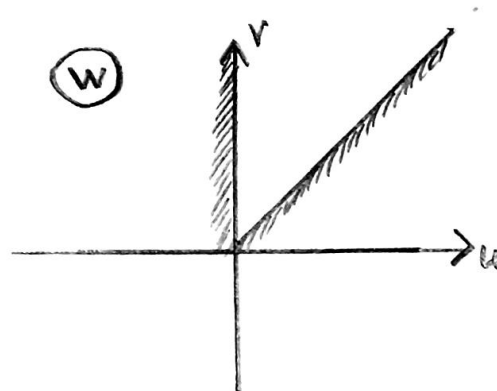
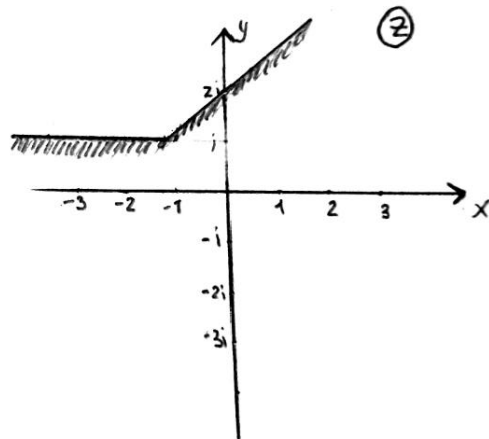


Рисунок 9 — Образ заданной области на плоскости w

Задание №5

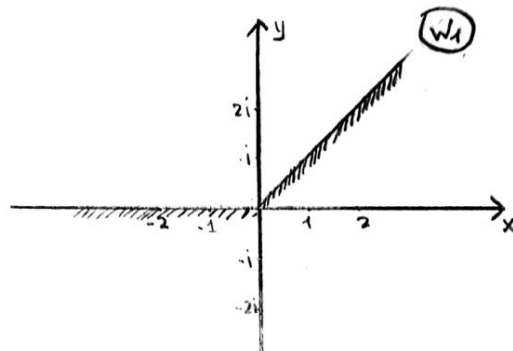
Отобразить область $\frac{\pi}{4} < \arg(z + 1 - i) < \pi$ на верхнюю полуплоскость.

Рисунок 10 — Заданная область на плоскости z **Решение:**

Первое, что мы сделали— это сместили с помощью линейной функции вершину угла в начало координат

$$|a| = 0, \arg a = 0, b = 1 - i$$

$$w_1 = z + 1 - i$$

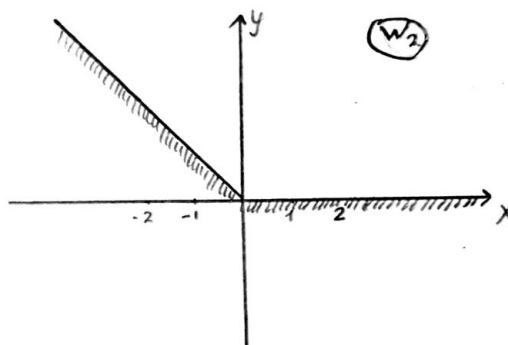
Рисунок 11 — Сдвиг на вектор $1 - i$

Принимаем w_1 за исходную функцию.

Затем повернем получившуюся область на угол $\frac{\pi}{4}$

$$|a| = 1, \arg a = -\frac{\pi}{4}, a = e^{-i\frac{\pi}{4}}, b = 0$$

$$w_2 = e^{i\pi/4} w_1$$

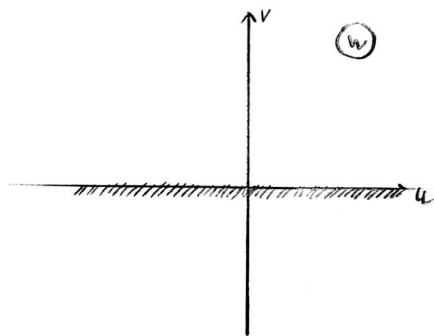
Рисунок 12 — Поворот на угол $\frac{\pi}{4}$

Принимаем w_2 за исходную функцию.

Необходимо полученный сектор преобразовать до развернутого угла.

Это можно сделать с помощью степенной функции.

$$w = w_2^{4/3}$$

Рисунок 13 — Образ заданной области на плоскости w

Теперь необходимо сделать замену

$$w = \left(e^{i\frac{\pi}{4}} w_1 \right) = e^{i\frac{\pi}{3}} w_1^{\frac{4}{3}}$$

$$w = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} (z + 1 - i)^{\frac{4}{3}}$$

Выводы

В статье рассмотрены основные свойства степенной функции комплексного переменного и их отображения на комплексной плоскости. Исследование степенных функций комплексного переменного позволяет более глубоко понять их геометрическое поведение и их влияние на преобразование областей в комплексной плоскости.

Библиографический список

1. Светульников, С. Г. Экономическое прогнозирование с помощью линейной производственной функции комплексных переменных // Вестник

- Оренбургского государственного университета. 2010. № 8(114). С. 190-195.
2. Козловский Д. В. Использование комплексных переменных в прогнозировании // Современные проблемы математики и вычислительной техники: сборник материалов X Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 23–24 ноября 2017 года. Министерство образования Республики Беларусь, Брестский государственный технический университет; редкол.: В. А. Головкин [и др.]. Брест: БрГТУ, 2017. С. 19–21.
 3. Бушков С.В., Коломиец Л.В. Элементы теории функций комплексного переменного: учеб.пособие. Самара: Самар, гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2006. 67 с.
 4. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. М.: Едиториал УРСС, 2003. 208с.
 5. Рубан В. П. Волны над искривленным дном: метод составного конформного отображения //Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2020. Т. 157. № 5. С. 944-956.
 6. Колесников И. А. Конформное отображение полуплоскости на круговой многоугольник с нулевыми углами // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 6. С. 11-24.