УДК 004

Динамическое программирование в контексте изучения математики

Романюк Виктория Дмитриевна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
Студент

Аннотация
В данной статье представлены определение и основные принципы динамического программирования, объяснение принципа оптимальности Беллмана. Также в статье описывается сравнение динамического программирования с другими методами оптимизации в контексте решения задач, связанных с программированием, в информатике. Объясняется принцип работы табличного решения задач. Также описан пример применения динамического программирования в математике.
Ключевые слова: динамическое программирование, математика, табличные решения, оптимизация

Dynamic programming in the context of learning mathematics

Romanyuk Viktoriya Dmitrievna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
Student

Abstract
This paper presents the definition and basic principles of dynamic programming, an explanation of the Bellman optimality principle. The paper also describes the comparison of dynamic programming with other optimization methods in the context of solving programming-related problems in computer science. The working principle of table-based problem solving is explained. An example of the application of dynamic programming in mathematics is also described.
Keywords: dynamic programming, mathematics, table solutions, optimization

1. Введение

1.1 Актуальность

Методы оптимизации решения задач актуальны во многих сферах жизнедеятельности общества (как в точных науках, так и в гуманитарных). Существует много различных методов упрощения задач, одним из которых является динамическое программирование.

Динамическое программирование позволяет решать задачи, которые имеют экспоненциальную сложность при использовании методов полного перебора, за полиномиальное время. Это особенно важно для задач, где прямое решение невозможно из-за огромного количества возможных вариантов. ДП разбивает сложные задачи на подзадачи, решает их и использует результаты для решения более крупных частей задачи.

Такой подход к решению задач изучается в математике и позволяет значительно упростить условие задачи и найти оптимальное решение за минимальное количество шагов.

Для студентов и исследователей изучение динамического программирования помогает развивать логическое мышление, умение разбивать сложные задачи на части и находить оптимальные решения.

1.2 Обзор исследований

Д. А. Карпов и В. И. Струченков рассмотрели прикладные задачи, для решения которых ранее предлагался метод динамического программирования, разработанный Р. Беллманом в середине прошлого века [1]. В работе рассмотрены задачи, допускающие расчёт оптимальной траектории без перебора вариантов, а также задачи, в которых допускается отбраковка бесперспективных состояний.

А. И. Орлов в своём исследовании разобрал экономические задачи с точки зрения динамического программирования [2]. Основной результат исследования – существование асимптотически оптимального плана. Доказательство проводится в нескольких постановках.

В. А. Шапошникова рассмотрела проблему применения метода динамического программирования при изучении оптимизационных задач в школьном курсе математики и информатики [3]. В работе также приведен пример решения задачи распределения ресурсов в среде табличного процессора.

Е. Е. Рябинина провела разбор 22-го задания (старого формата) из ЕГЭ по информатике, которое можно решить методами динамического программирования в рамках исследования [4]. Несмотря на то, что за 5 лет произошли изменения в структуре ЕГЭ по информатике, данное задание осталось в актуальном перечне под номерами 5 и 12.

О. А. Финогенов рассмотрел в своём исследовании основные принципы динамического программирования в исследовании операций, его основные идеи, а также их применение [5].

Н. В. Чиганова и Ю. И. Чиганова разработали в своей работе образовательный курс по теме «Динамическое программирование», в котором представлены теоретические материалы, задания для самопроверки, а также тесты по пройденному материалу [6].

1.3 Цель исследования

Цель – рассмотреть динамическое программирование в аспекте обучения математике и разобрать существующие задачи из данного раздела, которые могут быть применены на уроках математики.

2 Материалы и методы

Для разбора задач из раздела «Динамическое программирование» используется табличный редактор Excel.

3 Результаты и обсуждения

Динамическое программирование (ДП) является эффективным методом решения задач оптимизации, которые встречаются в различных областях точных наук. Этот подход базируется на принципе разбиения задачи на более простые подзадачи, решения которых сохраняются и используются для построения ответа на исходную задачу (то есть для достижения результата необходимо найти ответ на ряд небольших задач, которые в совокупности дадут правильный ответ для исходного условия). Особенно важен этот метод в обучении математике, где он помогает развивать у учеников системное мышление и навыки решения многокомпонентных задач.

Применение динамического программирования в математике позволяет ученикам освоить методы решения задач, требующих анализа и оптимизации множества переменных. В современном образовательном процессе, где акцент делается на развитие критического мышления и способности решать задачи различной сложности, изучение динамического программирования становится особенно важным, но при этом достаточно сложным процессом, так как задачи из раздела ДП предполагают нестандартный подход к решению.

Динамическое программирование также играет важную роль в понимании учениками связи между различными разделами математики, такими как комбинаторика, теория графов, линейная алгебра и теория чисел. Используя этот метод, учащиеся могут увидеть, как эти дисциплины объединяются в рамках решения реальных задач, что делает процесс обучения более целостным и осмысленным.

Еще одним важным аспектом является способность динамического программирования улучшать навыки алгоритмического мышления у учеников. В современных образовательных программах часто делается акцент на междисциплинарные подходы, и ДП, как метод, объединяющий математику и информатику, идеально подходит для этого. Изучение методов ДП способствует формированию у учащихся алгоритмической интуиции, что важно для разработки эффективных решений задач.

В основе динамического программирования лежит принцип оптимальности, предложенный Ричардом Беллманом, который формулируется следующим образом: любая часть оптимального решения также является оптимальной для соответствующей подзадачи. Этот принцип позволяет рекурсивно определять оптимальные решения, начиная с самых простых подзадач и постепенно объединяя их в решение исходной задачи. Принцип оптимальности Беллмана формирует основу для построения рекуррентных соотношений.

На основе принципа оптимальности основаны несколько методик решения задач на оптимизацию: например, табличное решение задач.

Табличное решение — это метод, при котором все возможные подзадачи решаются заранее и их результаты сохраняются в специальной таблице. Этот метод часто используется в итеративных подходах, где задача решается «снизу вверх», начиная с самых простых подзадач и заканчивая исходной задачей.

Рассмотреть применение данного метода можно на примере задачи разбиения числа на слагаемые. Задача формулируется следующим образом: нужно определить количество способов представить целое число n в виде суммы других целых чисел, не считая порядка слагаемых (например, 4 можно представить, как 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1).

Для решения этой задачи с использованием табличного подхода динамического программирования можно использовать двумерную таблицу P(n,k), где n – это число, которое нужно разложить, а k – это максимальное значение слагаемого в разложении.

Решение задачи стоит начать с определения значений, от которых можно будет отталкиваться при вычислении результата. В контексте данной задачи это значения P(0, k) и P(n, 0), которые будут всегда (независимо от k и n) равны 1 и 0, соответственно.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	-	-	-	-	-	-	-
2	0	-	-	-	-	-	-	-
3	0	-	-	-	-	-	-	-
4	0	-	-	-	-	-	-	-
5	0	-	-	-	-	-	-	-
6	0	-	-	-	-	-	-	-
7	0	-	-	-	-	-	-	-

Рисунок 1. Таблица решений при заполненных исходных значениях

Теперь необходимо заполнить остальные ячейки таблицы. Сделать это можно с помощью двух условий:

1. Если значение k больше n, то в таком случае P(n,k) = P(n,n).
2. В остальных случаях P(n,k) = P(n-k,k) + P(n,k-1).

На данном этапе можно заметить рекуррентную формулу, которая так или иначе будет сведена к исходным значениям, которые уже заполнены в таблице (см. рис. 1). Ниже описываются вычисления для P(3,2):

1. P(3,2) = P(1,2) + P(3,1) = 1 + 1 = 2.
2. P(1,2) = P(1,1) = P(0,1) + P(1,0) = 1 + 0 = 1.
3. P(3,1) = P(2,1) + P(3,0) = 1 + 0 = 1.
4. P(2,1) = P(1,1) + P(2,0) = 1 + 0 = 1.

Благодаря рекуррентной формуле получилось вычислить не только P(3,2), но и значения для P(1,2), P(3,1), P(2,1) и других, тем самым за одну итерацию заполнив больше свободных ячеек в таблице (см. рис. 2).

Полученные значения учитываются и в дальнейших вычислениях, при разложении больших чисел чем P(3,2).

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	-	-	-	-	-
2	0	1	-	-	-	-	-	-
3	0	1	2	-	-	-	-	-
4	0	-	-	-	-	-	-	-
5	0	-	-	-	-	-	-	-
6	0	-	-	-	-	-	-	-
7	0	-	-	-	-	-	-	-

Рисунок 2. Результат вычисления P(3,2)

Проведя все вычисления (которые после двух или трёх итераций сводятся к использованию заранее вычисленных значений) можно сделать вывод, что у числа 7 максимальное количество разложений 13 при k = 7 (см. рис. 3).

Можно выделить следующие разложения: 7, 6 + 1, 5 + 2, 5 + 1 + 1, 4 + 3, 4 + 2 + 1, 4 + 1 + 1 + 1, 3 + 3 + 1, 3 + 2 + 2, 3 + 2 + 1 + 1, 3 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3	3	3
4	0	1	3	4	5	5	5	5
5	0	1	3	5	6	7	7	7
6	0	1	4	7	9	10	11	11
7	0	1	4	8	11	13	14	15

Рисунок 3. Результат решения поставленной задачи

Можно выделить и другие задачи в математике, которые решаются методами динамического программирования:

1. Задача о пути с минимальной стоимостью (эта задача состоит в нахождении пути с минимальной стоимостью от одной вершины графа до другой).
2. Задача о нахождении числа размещений без пересечений (задача связана с комбинаторикой и включает вычисление числа способов расставить скобки в выражении, строить правильные двоичные деревья, делить многоугольники на треугольники и другие задачи).
3. Задача о числах Фибоначчи (стандартная задача на использование рекуррентных формул).

Одной из ключевых причин, по которой динамическое программирование следует изучать в рамках школьного курса математики, является его способность демонстрировать важность системного подхода к решению задач. Большинство математических задач, с которыми сталкиваются школьники, требуют пошагового анализа и поиска оптимальных решений. ДП, по сути, помогает учащимся увидеть, как сложные задачи можно разложить на более простые подзадачи, а затем, последовательно решая каждую из них, прийти к оптимальному решению основной задачи. Это не только укрепляет понимание математических принципов, но и развивает важные навыки планирования и стратегического мышления.

Кроме того, динамическое программирование позволяет учащимся на практике увидеть, как можно минимизировать затраты времени и ресурсов при решении задач. В реальных задачах часто встречаются случаи, когда один и тот же подзадача может возникнуть несколько раз. Использование ДП позволяет эффективно избежать повторных вычислений, сохраняя результаты промежуточных шагов.

Таким образом, интеграция динамического программирования в школьный курс математики не только обогащает учебный процесс, но и готовит учащихся к решению сложных задач в различных областях, включая информатику, экономику и науки о данных.

Библиографический список

1. Карпов Д. А., Струченков В. И. Динамическое программирование в прикладных задачах специального вида // Прикладная информатика. 2020. Т. 15. № 3(87). С. 46-59.
2. Орлов А. И. Существование асимптотически оптимальных планов в дискретных задачах динамического программирования // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2020. № 155. С. 147-163.
3. Шапошникова В. А. Метод динамического программирования в школьном курсе математики и информатики // Материалы Ивановских чтений. 2023. № 2(41). С. 69-71.
4. Рябинина Е. Е. Решение задач ЕГЭ с использованием алгоритмов динамического программирования // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. 2019. № 6(63). С. 71-78.
5. Финогенов О. А. Динамическое программирование: основные идеи и их применение в рекурсии // Современные информационно-коммуникационные технологии. 2022. № 13. С. 51-52.
6. Чиганова Н. В., Чиганова Ю. И. Разработка элективного образовательного ресурса "Динамическое программирование" // Аллея науки. 2017. Т. 4. № 16. С. 966-969.