

Эффективность графического метода решения задач линейного программирования

Романюк Виктория Дмитриевна

Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема

Студент

Аннотация

В данной статье рассмотрен графический метод решения задач линейного программирования, а также проведено сравнение с симплекс-методом на примере решения задачи планирования процессов. В статье описан принцип графического метода, его преимущества и недостатки относительно симплекс-метода и его эффективность в рамках поставленных задач.

Ключевые слова: линейное программирование, математика, графический метод, симплекс-метод, задачи планирования

Effectiveness of the graphical method of solving linear programming problems

Romanyuk Viktoriya Dmitrievna

Sholom-Aleichem Priamursky State University

Student

Abstract

This article considers the graphical method of solving linear programming problems and compares it with the simplex method on the example of solving the problem of process planning. The article describes the principle of the graphical method, its advantages and disadvantages in relation to the simplex method and its effectiveness in the framework of the set tasks.

Keywords: linear programming, mathematics, graphical method, simplex method, planning problems

1. Введение

1.1 Актуальность

Линейное программирование (ЛП) является одним из ключевых методов математического моделирования, который широко применяется для оптимизации ресурсов в самых разных областях: от экономики и логистики до инженерии и планирования производства. Задачи ЛП предполагают нахождение оптимального решения для целевой функции при наличии ряда линейных ограничений, описывающих возможности и ограничения системы.

Существует несколько методов решения задач линейного программирования, среди которых наибольшее распространение получили симплекс-метод и графический метод. Если симплекс-метод применяется для

решения сложных задач с большим количеством переменных, то графический метод используется для наглядного анализа задач с двумя переменными. Он позволяет визуально оценить допустимую область решений и найти оптимальную точку.

1.2 Обзор исследований

В. С. Барановская и С. О. Барышевский в своей работе рассмотрели графический метод решения задач линейного программирования [1]. В работе представлен пример решения задачи ЛП и подробное объяснение графического метода.

О. А. Лебедь в своём исследовании описала решение матричной задачи теории игр путем сведения к задаче линейного программирования [2]. Для расчётов в рамках выбранной задачи использовался Microsoft Excel, что позволило упростить расчёт значений и ускорить процесс решения задачи.

В. С. Морозов рассмотрел основные методы решения задач линейного программирования: симплекс-метод, метод Штифеля, метод целочисленного ЛП и графический метод [3]. Также автором описаны программные обеспечения, в которых производится решение задач линейного программирования.

А. С. Клентак и Л. С. Клентак рассмотрели в своём исследовании вопрос преподавания линейного программирования как математической дисциплины [4]. В работе были рассмотрены учебные пособия по линейному программированию, которые помогают сделать учебный процесс эффективным.

М. И. Гераськин, А. С. Клентак и Л. С. Клентак представили вариант планирования и проведения практического занятия, в процессе которого решается широкий круг задач в рамках темы, связанной с линейным программированием [5].

1.3 Цель исследования

Цель – изучить методы решения задач линейного программирования и определить эффективность графического метода.

2 Материалы и методы

Для решения поставленной цели используются табличные редакторы и системы для построения графиков на координатной плоскости.

3 Результаты и обсуждения

Линейное программирование – это раздел математической оптимизации, который занимается поиском оптимальных решений для линейных моделей. Основная задача ЛП заключается в максимизации или минимизации целевой функции, которая зависит от нескольких переменных, при соблюдении определённых линейных ограничений, выраженных в виде неравенств или уравнений.

Каждая задача ЛП включает три основных компонента:

1. Целевая функция: математическое выражение, которое нужно оптимизировать. Она может описывать, например, максимизацию прибыли или минимизацию затрат. Целевая функция задаётся как линейная комбинация переменных, например: $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ (где z – значение целевой функции, c – коэффициенты, а x – переменные).

2. Ограничения – это набор условий, которые должны быть соблюдены для решения задачи. Они накладывают лимиты на значения переменных и имеют вид линейных неравенств или уравнений.

3. Область допустимых решений (ОДР) – это множество всех возможных значений переменных, которые удовлетворяют условиям ограничений. Это множество может быть представлено в виде многогранника, и оптимальное решение задачи ЛП обычно находится на его границе.

В настоящее время можно выделить множество примеров сфер жизни человека, в которых встречаются задачи линейного программирования: часто можно встретить ЛП в экономике, когда появляется необходимость расчёта оптимального распределения ресурсов или максимизации прибыли. Также линейное программирование часто встречается в логистике, а именно в задачах минимизации транспортных затрат или нахождения оптимальных маршрутов.

Задачи линейного программирования можно разделить на несколько типов в зависимости от их структуры и целей:

1. Задачи на максимум и минимум.
2. Задачи с неравенствами и равенствами.
3. Задачи с непрерывными и целочисленными переменными.

Существует несколько методов решения задач ЛП, каждый из которых подходит для разных типов задач. Одним из наиболее популярных методов является симплекс-метод. Симплекс-метод пошагово перемещается между вершинами допустимой области, каждый раз улучшая значение целевой функции, пока не достигнет оптимума. Метод эффективен для многих задач, но может столкнуться с проблемами на вырожденных задачах.

Помимо симплекс-метода, в линейном программировании предусмотрен графический метод решения задач, который позволяет наглядно продемонстрировать область допустимых решений.

Этот метод применяется только для задач с двумя переменными, так как их можно визуализировать на плоскости. Графический метод позволяет увидеть допустимую область, границы ограничений и целевую функцию, что делает его полезным в учебных целях и для анализа простых задач.

Графический метод наиболее полезен в образовательных целях, когда необходимо продемонстрировать основные принципы линейного программирования. Он также подходит для решения простых практических задач, в которых используются две переменные.

Графический метод включает несколько последовательных шагов:

1. Прежде чем перейти к построению графика, необходимо сформулировать задачу линейного программирования. Это включает задание

целевой функции, которую нужно оптимизировать (максимизировать или минимизировать), и систему линейных ограничений. В рамках данной работы рассматривать целевую функцию $F(X) = 2x_1 + 5x_2$, значение которой необходимо максимизировать. Также определим систему линейных ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Каждое из линейных ограничений можно изобразить в виде прямой на плоскости. Чтобы сделать это, каждое неравенство преобразуется в уравнение (например, $2x_1 - x_2 = 6$), после чего находятся точки пересечения линии с осями координат. Все точки ниже или выше этой линии (в зависимости от знака неравенства) формируют допустимую область (см. рис. 1).

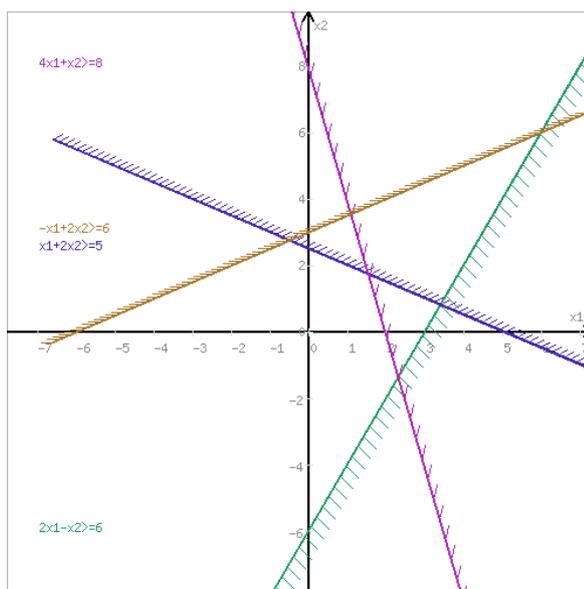


Рисунок 1. График линейных ограничений задачи

На данном этапе график не отображает допустимую область, а представляет собой лишь ограничения для ОДР, которые накладываются линейными ограничениями. Для того, чтобы определить ОДР, необходимо, опираясь на ограничения каждой прямой, найти многоугольник, которое и будет представлять собой область допустимых решений. В данном случае это пересечение прямых $2x_1 - x_2 = 6$ и $-x_1 + 2x_2 = 6$ (см. рис. 2).

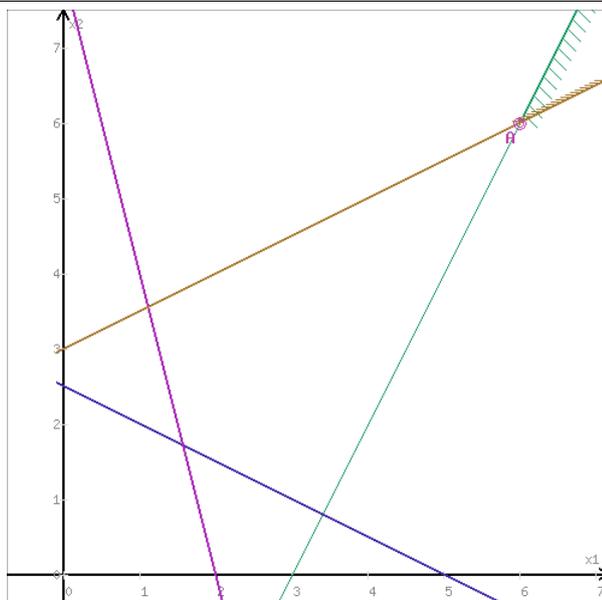


Рисунок 2. Область допустимых решений на графике ограничений

Не трудно определить, что в контексте поставленной задачи ОДР не ограничена другими прямыми и начинается в точке А.

3. Затем необходимо построить прямую, которая соответствует целевой функции $F(X)$. Вектор-градиент, составленный из коэффициентов целевой функции, указывает направление максимизации $F(X)$. Начало вектора – точка $(0; 0)$, конец – точка $(2; 5)$. Поскольку в рамках данной задачи интересует максимальное решение, нужно двигать прямую до последнего касания обозначенной области. На графике (см. рис. 2) эта прямая обозначена пунктирной линией.

Оптимальное решение задачи линейного программирования будет находиться в одной из вершин допустимой области.

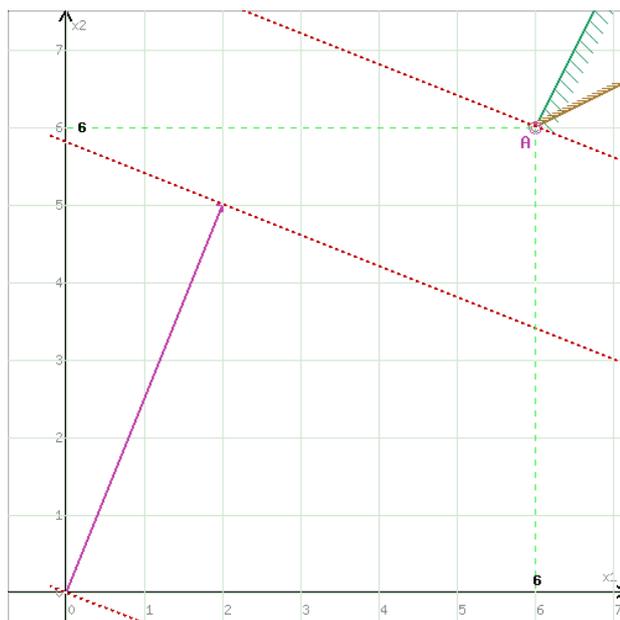


Рисунок 3. Вектор-градиент и область допустимых решений на графике

Как можно заметить – вектор-градиент независимо от позиции относительно пунктирной линии не имеет точек пересечения с ОДР, что позволяет сделать вывод о том, что решений задача не имеет допустимых решений и при этом ОДР представляет собой бесконечное множество.

Графический метод понятен и интуитивен. Его основное преимущество заключается в наглядности, но при этом он может быть использован в задачах только с двумя переменными, что делает его неподходящим для сложных задач. Также для задач с целыми числами или дробными значениями могут возникнуть трудности с точным нахождением решения, если полагаться только на визуальный анализ.

При этом симплекс-метод способен эффективно решать задачи с несколькими переменными и сотнями ограничений. Это делает его пригодным для сложных промышленных, экономических и научных задач. Симплекс-метод работает с высокой точностью, используя численные алгоритмы, что позволяет решать задачи с большими значениями переменных и коэффициентов.

В сравнении с графическим методом симплекс-метод значительно мощнее и способен решать задачи, которые невозможно визуализировать, но его применение требует большего вычислительного ресурса, либо человеческого времени.

Можно сделать вывод, что графический метод решения задач линейного программирования достаточно прост для решения ряда задач, но при этом ограничен количеством допустимых переменных в целевой функции и линейных ограничений, при этом представляя собой удобный и быстрый способ определения решения поставленной задачи. Данный метод хорошо подходит для обучения линейному программированию и решения несложных задач. Данный метод позволяет визуально определить область допустимых решений, что делает его в некоторых случаях более предпочтительным, чем симплекс-метод.

Если рассматривать линейное программирование как тему из курса математики, графический метод может стать наилучшим выбором для обучения принципам оптимизации задач планирования или максимизации (минимизации) функции.

Библиографический список

1. Барановская В. С., Барышевский С. О. Экономико-математический анализ полученных оптимальных решений задач линейного программирования // Международный студенческий научный вестник. 2023. № 1. С. 75.
2. Лебедь О. А. Применение линейного программирования для решения задач теории игр // Заметки ученого. 2023. № 4. С. 38-41.
3. Морозов В. С. Методы решения задач линейного программирования // Наука XXI века: актуальные направления развития. 2020. № 1-1. С. 457-460.
4. Клентак А. С., Клентак Л. С. О преподавании линейного

программирования как математической дисциплины // Актуальные проблемы современного образования. 2022. № 8(32). С. 204-211.

5. Гераськин М. И., Клентак А. С., Клентак Л. С. Методические аспекты занятия по теме "Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования" // Геометрия и геометрическое образование: Сборник трудов IV Международной научной конференции (к 80-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 29–30 ноября 2019 года / Под общей редакцией Р.А. Утеевой. Тольятти: Тольяттинский государственный университет, 2020. С. 178-182.