

Нахождение оптимального решения транспортных задач

Аристова Дарья Андреевна

Приамурский Государственный университет имени Шолом-Алейхема

Студент

Аннотация

Транспортные задачи имеют 4 метода решения: метод северо-западного угла, метод наименьшей стоимости, метод аппроксимации Фогеля, метод потенциалов. Цель исследования: найти оптимальное решение транспортной задачи, а также выбрать наилучший метод решения таких задач. Опытным путем выявили, что наиболее оптимальное решение имеет метод потенциалов.

Ключевые слова: транспортные задачи, методы решения, оптимальный, единицы товара, строка, столбец

Finding the optimal solution to transport problems

Aristova Darya Andreevna

Sholom-Aleichem Priamursky State University

Student

Abstract

Transportation problems have 4 methods of solution: the northwest corner method, the least cost method, the Vogel approximation method, and the potential method. The purpose of the study is to find the optimal solution to the transport problem, as well as to choose the best method for solving such problems.

It has been experimentally revealed that the method of potentials has the most optimal solution.

Keywords: transport tasks, solution methods, optimal, product units, row, column

Введение

Каждый человек сталкивался с такой задачей, как получить максимальную выгоду, но при этом потратить минимум средств. Ведь всем известно, что ресурсы имеют такое свойство, как заканчиваться. Если бы этого не было, то жизнь была бы слишком проста и скучна. Но когда ресурс ограничен, сразу начинаем думать «как сделать так, чтобы получить максимальный эффект, но при этом не попасть в убыток?» Для решения задач такого рода надо составлять план действий, в котором будет несколько вариантов решения, чтобы в конечном итоге выбрать оптимальный. Транспортные задачи, в свою очередь, тоже решаются с помощью определенного плана несколькими методами, из которых в конце выбирается оптимальный план.

Е.Г.Агапова и Т.М.Попова пишут: «Решение данной задачи позволяет разработать наиболее рациональные пути и способы транспортирования товаров, устранить чрезмерно дальние, встречные, повторные перевозки. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий и фирм...» [1].

Помимо основных 4 методов решения есть и другие, модифицированные. Как например, Н.А. Ноговицын в своей статье предложил модифицировать метод потенциалов, для ускоренного нахождения оптимального решения [13].

А в свою очередь Р.Б.Карасева в своей работе предлагает для решения транспортных задач небольшой размерности, использовать теорию графов, что тоже допустимо [8].

Так же Ю.О.Гантимурова и В.С.Ермолина предлагают использовать метод ранжирования для решения транспортной задачи с помощью пятиугольных нечетных чисел [6].

Цель исследования: найти оптимальное решение транспортной задачи, а также выбрать наилучший метод решения таких задач.

Методы исследования:

1. изучение и анализ научной теоретической литературы;
2. решение задач;
3. сравнение полученных данных.

Транспортная задача – задача об оптимальном плане перевозок продукта из пункта наличия в пункт потребления [18].

Цель такой задачи заключается в том, чтобы: во-первых, весь товар поставщиков был реализован; во-вторых, спрос каждого потребителя был полностью удовлетворен; в-третьих, суммарные затраты при перевозке товара должны быть минимальные.

Имеем m складов $A_1, A_2, \dots, A_m$ с запасами одной и той же продукции в количестве $a_1, a_2, \dots, a_m$ единиц. Также имеем n пунктов потребителя $B_1, B_2 \dots B_n$, заказавших $b_1, b_2 \dots, b_n$ единиц товара. При перевозке товара с i -ого пункта в j -ый пункт, получаем издержки (расходы) C_{ij} , где $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$, что так же можно назвать транспортным тарифом. Условие транспортной задачи удобно записать в виде таблицы 1 [7].

Таблица 1 – Пример транспортной задачи

	B_1 b_1	B_2 b_2	B_3 b_3	B_4 b_4
A_1 a_1	11	12	13	14
A_2 a_2	21	22	23	24
A_3 a_3	31	32	33	34

Чтобы найти суммарные затраты F на перевозку нужно перемножить все издержки на количество товара отправляемого этой поставкой.

Чтобы мощность каждого поставщика была реализована, составим уравнения баланса для каждой строки таблицы поставок [14].

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3 \end{cases} \quad (1)$$

Подобные уравнения баланса составим и для столбцов таблицы, чтоб спрос каждого из потребителей был удовлетворен [14].

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4 \end{cases} \quad (2)$$

Так как количество перевозок не может быть отрицательным, поэтому предположим, что

$$x_{ij} \geq 0, \text{ где } i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4.$$

Теперь суммарные затраты F на перевозку товара можно посчитать следующим образом:

$$F = c_{11} * x_{11} + c_{12} * x_{12} + c_{13} * x_{13} + c_{14} * x_{14} + c_{21} * x_{21} + c_{22} * x_{22} + c_{23} * x_{23} + c_{24} * x_{24} + c_{31} * x_{31} + c_{32} * x_{32} + c_{33} * x_{33} + c_{34} * x_{34} \quad (3)$$

Если $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, где a_i - количество товара на складе i , а b_j - количество товара, необходимого j потребителю.

Такой тип транспортных задач называется задачами закрытого типа.

Если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ или же $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то такой тип задач называется открытым.

Для решения задача открытого типа, необходимо провести процедуру закрытия задачи.

Если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то можно утверждать, что потребность не может быть покрыта в полной мере. Чтобы это исправить, нужно добавить фиктивный пункт отправления $m + 1$ с количеством товара $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, стоимость перевозок которых равна нулю[9].

Если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то можно утверждать, что количество товара на складе превышает запросы потребителей, и часть товар останется у производителя. Чтобы это исправить, нам нужно добавить фиктивного потребителя $n + 1$ с потребностью $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, стоимость перевозок, которых равны нулю[9].

Решение транспортной задачи методом северо-западного угла

Задача 1. В таблице 2 приведены исходные данные транспортной задачи: заданы транспортные расходы на перевозку единицы груза, слева указаны возможности поставщиков, а сверху – спрос потребителей. Найдите затраты на перевозку товара от поставщика к потребителю, решая задачу методом северо-западного угла [9].

Таблица 2 – Метод северо-западного угла

	B ₁ 100	B ₂ 40	B ₃ 80	B ₄ 60
A ₁ 160	4	8	10	5
A ₂ 30	4	6	2	3
A ₃ 90	4	4	6	5

Определим к какому типу относится задача. Для этого необходимо сравнить суммарные запасы поставщика $\sum_{i=1}^m a_i$ и суммарные запросы потребителя $\sum_{j=1}^n b_j$. Если они равны, то решаем задачу по тому принципу, который был описан в пункте 1.2. Методы нахождения опорного плана решения транспортных задач.

Если они не равны, то добавляем фиктивного поставщика или фиктивного потребителя, с необходимым количеством товара, транспортный тариф которого равен нулю.

$$\sum_{i=1}^m a_i = 160 + 30 + 90 = 280$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = 100 + 40 + 80 + 60 = 280$$

Так как $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то можно говорить, что задача относится к закрытому типу, и дальнейших действий по ее закрытию проводить не надо.

Начинаем заполнять с ячейки (1,1).

Потребителю на склад B_1 требуется 100 (b_1) единиц товара. На складе A_1 есть 160 (a_1) единиц товара. Так как $a_1 > b_1$, то в ячейку (1,1) записываем b_1 . Потребность склада B_1 полностью удовлетворена, поэтому данный столбец больше заполнять не требуется.

Переходим на следующий столбец, при этом остаемся на прежней строке, ячейка (1,2). На складе A_1 осталось $a_1 - b_1$ единиц товара, а именно $a_1' = 160 - 100 = 60$. На склад B_2 требуется 40 (b_2) единиц товара. Так как $a_1' > b_2$, то в ячейку (1,2) записываем b_2 . Потребность склада B_2 полностью удовлетворена, поэтому данный столбец больше заполнять не требуется.

Переходим на следующий столбец, при этом остаемся на прежней строке, ячейка (1,3). На складе A_1 осталось $a_1' - b_2$ единиц товара, а именно $a_1'' = 60 - 40 = 20$. На склад B_3 требуется 80 (b_3) единиц товара. Так как $a_1'' < b_3$, то в ячейку (1,3) записываем a_1'' и спускаемся вниз на 1 строку, при этом столбец остается тот же, ячейка (2,3). Потребность склада B_3 теперь составляет $b_3 - a_1''$ единиц товара, а именно $b_3' = 80 - 20 = 60$. На складе A_2 есть 30 (a_2) единиц товара. Так как $a_2 < b_3'$, то в ячейку (2,3)

записываем значение a_2 и спускаемся вниз на 1 строку, при этом столбец остается тот же, ячейка (3,3). Потребность склада B_3 теперь составляет $b_3' - a_2$ единиц товара, а именно $b_3'' = 60 - 30b_3'' = 30$. На складе A_3 есть 90 (a_3) единиц товара. Так как $a_3 > b_3''$, то в ячейку (3,3) записываем значение b_3'' . На этом потребности склада B_3 полностью удовлетворены.

Переходим на следующий столбец, при этом остаемся на прежней строке, ячейка (3,4). На складе A_3 осталось $a_3 - b_3''$ единиц товара, а именно $a_3 = 90 - 30a_3 = 60$. Потребность склада B_4 составляет 60 (b_4) единиц товара. Так как $a_3 = b_4$, то в ячейку (3,4) записываем значение $a_3 = b_4$. Теперь потребность склада B_4 полностью удовлетворена.

На этом распределение товара от поставщика к потребителю закончилось. Получаем таблицу 3.

Таблица 3 – Метод северо-западного угла

	B_1 100	B_2 40	B_3 80	B_4 60
A_1 160	4 100	8 40	10 20	5 0
A_2 30	4 0	6 0	2 30	3 0
A_3 90	4 0	4 0	6 30	5 60

Остается только рассчитать затраты перевозок товара. Для этого понадобятся стоимость конкретной поставки к конкретному потребителю за единицу товара (транспортный тариф), умноженную на количество товара, отправленной этой поставкой. Находим затраты по формуле (1)

$$F = 4 * 100 + 8 * 40 + 10 * 20 + 5 * 0 + 4 * 0 + 6 * 0 + 2 * 30 + 3 * 0 + 4 * 0 + 4 * 0 + 6 * 30 + 5 * 60 = 1460$$

В дальнейшем умножение на 0 можем опустить.

Таким образом, получаем расход на доставку товара 1460 денежных единиц.

Решение транспортной задачи методом наименьшей стоимости

Задача 2. В таблице 4 приведены исходные данные транспортной задачи: заданы транспортные расходы на перевозку единицы груза, слева указаны возможности поставщиков, а сверху – спрос потребителей. Найдите затраты на перевозку товара от поставщика к потребителю, решая задачу методом наименьшей стоимости [9].

Таблица 4 – Метод наименьшей стоимости

	B ₁ 100	B ₂ 40	B ₃ 80	B ₄ 60
A ₁ 160	4	8	10	5
A ₂ 30	4	6	2	3
A ₃ 90	4	4	6	5

Так как данная задача ранее уже была проверена на закрытость, то этот этап проверки в дальнейшем можем опустить.

Распределение товара данным методом начинаем с ячейки с самым наименьшим тарифом, то есть с ячейки (2, 3), так как ее тариф равен $c_{23} = 2$.

В ячейку (2, 3) записываем 30 единиц товара, так как запасы склада $A_2 a_2 = 30$. Данная строка в распределении товара больше участвовать не будет, так как ее запасы исчерпаны, а потребность B_3 изменилась и стала равна $b_3' = 50$

Получаем таблицу 5.

Таблица 5 – Метод наименьшей стоимости

	B ₁ 100	B ₂ 40	B ₃ 80	B ₄ 60
A ₁ 160	4	8	10	5
A ₂ 30	4	6	2 30	3
A ₃ 90	4	4	6	5

Находим следующую ячейку с наименьшим тарифом. Ячейка (2, 4) имеет тариф равный $c_{24} = 3$, но так как запасы поставщика A_2 исчерпаны, поэтому берем ячейку (1,1) или (3,1) или (3,2). Сравним максимально возможные поставки для этих ячеек: для ячейки (1,1) $x_{11} = \min\{160, 100\}$, для ячейки (3,1) $x_{31} = \min\{90, 100\}$, для ячейки (3,2) $x_{32} = \min\{90, 40\}$. Даем поставку в ячейку (1, 1), так как ее максимальная поставка оказалась больше остальных.

Получаем таблицу 6.

Таблица 6 – Метод наименьшей стоимости

	B_1 100	B_2 40	B_3 80	B_4 60
A_1 160	4 100	8	10	5
A_2 30	4	6	2 30	3
A_3 90	4	4	6	5

Спрос потребителя B_1 полностью удовлетворен, поэтому данный столбец больше не рассматриваем, а остаток товара у поставщика A_1 стал равным $a_1' = 60$

Ячейка (3, 2) имеет наименьшую стоимость $c_{32} = 4$. Запишем в ячейку 40 единиц, так как $b_2' = 40$.

Получаем таблицу 7.

Таблица 7 – Метод наименьшей стоимости

	B_1 100	B_2 40	B_3 80	B_4 60
A_1 160	4 100	8	10	5
A_2 30	4	6	2 30	3
A_3 90	4	4 40	6	5

Спрос потребителя B_2 полностью удовлетворен, поэтому данный столбец больше не рассматриваем, а остаток товара у поставщика A_3 стал равным $a_3' = 50$.

Наименьший тариф у ячеек (1, 4) и (3, 4), поэтому сравним максимально возможные поставки для этих ячеек: для ячейки (1,4) $x_{14} = \min\{60, 60\}$, для ячейки (3,4) $x_{34} = \min\{50, 60\}$. Даем поставку в ячейку (1, 4), так как ее максимальная поставка оказалась больше другой.

Получаем таблицу 8.

Таблица 8 – Метод наименьшей стоимости

	B_1 100	B_2 40	B_3 80	B_4 60
A_1 160	4 100	8	10	5 60

A ₂ 30	4	6	2 30	3
A ₃ 90	4	4 40	6	5

Потребность B_4 полностью удовлетворена, и данный столбец в распределении товара больше участвовать не будет.

Только потребитель B_3 остался не удовлетворен. Выбираем ячейку (3, 3), так как ее тариф меньше тарифа ячейки (1, 3), и равен $c_{33} = 6$. $b_3' = a_3' = 50$

Получаем таблицу 9.

Таблица 9 – Метод наименьшей стоимости

	B ₁ 100	B ₂ 40	B ₃ 80	B ₄ 60
A ₁ 160	4 100	8	10	5 60
A ₂ 30	4	6	2 30	3
A ₃ 90	4	4 40	6 50	5

Теперь можем рассчитать затраты на перевозку методом наименьшей стоимости по формуле (3)

$$F = 4 * 100 + 5 * 60 + 2 * 30 + 4 * 40 + 6 * 50 = 1220$$

Таким образом, получаем расход на доставку товара данным методом 1220 денежных единиц.

Уже на этом этапе мы можем увидеть, что метод наименьшей стоимости, по сравнению с методом северо-западного угла, более оптимальный.

Решение транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля

Задача 3. В таблице приведены исходные данные транспортной задачи: заданы транспортные расходы на перевозку единицы груза, слева указаны возможности поставщиков, а сверху – спрос потребителей. Найдите затраты на перевозку товара от поставщика к потребителю, решая задачу методом аппроксимации Фогеля [9].

Таблица 10 – Метод аппроксимации Фогеля

	B_1 100	B_2 40	B_3 80	B_4 60	
A_1 160	4	8	10	5	
A_2 30	4	6	2	3	
A_3 90	4	4	6	5	

Для каждого столбца находим разность двух минимальных транспортных тарифов, а полученное число записываем в добавленную строку соответствующего столбца. Для столбца B_1 , т.к. все транспортные тарифы равны 4, мы получаем $4 - 4 = 0$, записываем в нижнюю строку этого столбца. Для столбца B_2 два наименьших тарифа 4 и 6, произведя простые вычисления, получаем $6 - 4 = 2$. Полученное число записываем в соответствующую строку. Для столбца B_3 два наименьших тарифа 2 и 6, произведя простые вычисления, получаем $6 - 2 = 4$. Полученное число записываем в соответствующую строку. Для столбца B_4 два наименьших тарифа 3 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 3 = 2$. Полученное число записываем в соответствующую строку.

Для строк выполняем все те же операции, что и для столбцов.

Для строки A_1 два наименьших тарифа 4 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 4 = 1$. Полученное число записываем в соответствующий столбец. Для строки A_2 два наименьших тарифа 2 и 3, произведя простые вычисления, получаем $3 - 2 = 1$. Полученное число записываем в соответствующий столбец. Для строки A_3 два наименьших тарифа 4 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 4 = 1$. Полученное число записываем в соответствующий столбец.

Получаем таблицу 11.

Таблица 11 – Метод аппроксимации Фогеля

	B_1 100	B_2 40	B_3 80	B_4 60	
A_1 160	4	8	10	5	1
A_2 30	4	6	2	3	1
A_3 90	4	4	6	5	1

	0	2	4	2	
--	---	---	---	---	--

Из полученных разностей выбираем наибольшую. В нашем примере эта разность принадлежит столбцу B_3 . Все следующие операции будем проводить с этим столбцом. Находим наименьший тариф, он равен 2 и принадлежит ячейке (2, 3). Заполняем ячейку максимальным количеством товара. Ее можем заполнить 30 единицами товара (столько товара находится на складе A_2).

Далее опять находим разность двух минимальных транспортных тарифов, не учитывая строку A_2 , так как ее ресурсы полностью исчерпаны. Для столбца B_1 получаем значение $4 - 4 = 0$, записываем в нижнюю строку этого столбца. Для столбца B_2 два наименьших тарифа 4 и 8, произведя простые вычисления, получаем $8 - 4 = 4$. Полученное число записываем в соответствующую строку. Для столбца B_3 два наименьших тарифа 6 и 10, произведя простые вычисления, получаем $10 - 6 = 4$. Полученное число записываем в соответствующую строку. Для столбца B_4 два наименьших тарифа 5 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 5 = 0$. Полученное число записываем в соответствующую строку.

Для строки A_1 два наименьших тарифа 4 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 4 = 1$. Полученное число записываем в соответствующий столбец. Для строки A_3 два наименьших тарифа 4 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 4 = 1$. Полученное число записываем в соответствующий столбец.

Получаем таблицу 12.

Таблица 12 – Метод аппроксимации Фогеля

	B_1 100	B_2 40	B_3 50	B_4 60	
A_1 160	4	8	10	5	1
A_2 0	4	6	2 30	3	
A_3 90	4	4	6	5	1
	0	4	4	0	

Из полученных разностей выбираем наибольшую. В примере эта разность принадлежит столбцам B_2 и B_3 . Выбрать можно любой из них. Все следующие операции будем проводить со столбцом B_2 . Находим наименьший тариф в этом столбце, и он равен 4 и принадлежит ячейке (3, 2). Заполняем ячейку максимальным количеством товара. Ее можем заполнить 40 единицами товара (столько товара необходимо потребителю B_2). Данный столбец в

заполнении участвовать больше не будет, так как его потребность полностью удовлетворена. В строке A_3 осталось $90 - 40 = 50$ единиц товара.

Опять находим разность двух минимальных транспортных тарифов, не учитывая строку A_2 , и столбец B_2 . Для столбца B_1 мы получаем значение $4 - 4 = 0$, записываем в нижнюю строку этого столбца. Для столбца B_3 два наименьших тарифа 6 и 10, произведя простые вычисления, получаем $10 - 6 = 4$. Полученное число записываем в соответствующую строку. Для столбца B_4 два наименьших тарифа 5 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 5 = 0$. Полученное число записываем в соответствующую строку.

Для строки A_1 два наименьших тарифа 4 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 4 = 1$. Полученное число записываем в соответствующий столбец. Для строки A_3 два наименьших тарифа 4 и 5, произведя простые вычисления, получаем $5 - 4 = 1$. Полученное число записываем в соответствующий столбец.

Получаем таблицу 13.

Таблица 13 – Метод аппроксимации Фогеля

	B_1 100	B_2 40	B_3 50	B_4 60	
A_1 160	4	8	10	5	1
A_2 30	4	6	2 30	3	
A_3 50	4	4 40	6	5	1
	0		4	0	

Из полученных разностей выбираем наибольшую. В нашем примере эта разность принадлежит столбцу B_3 . Все следующие операции будем проводить со столбцом B_3 . Находим наименьший тариф в этом столбце, и он равен 5 и принадлежит ячейке (3, 3). Заполняем ячейку максимальным количеством товара. Ее можем заполнить 50 единицами товара (такова потребность потребителя B_3 после первичного заполнения). Данный столбец в заполнении участвовать больше не будет, так как его потребность полностью удовлетворена. В строке A_3 осталось $50 - 50 = 0$ единиц товара, то есть запасы этого поставщика исчерпаны и в заполнении он больше участвовать не будет.

Так как все поставщики, кроме A_1 , распределили весь свой товар между потребителями, то будем работать с оставшимся поставщиком.

Потребителю B_1 необходимо 100 единиц товара. Их и возьмем у оставшегося поставщика A_1 . Его запасы равны 160, но после отправки

потребителю B_1 , они будут равны $160 - 100 = 60$. Именно столько и надо единиц товара потребителю B_4 .

Получаем таблицу 14.

Таблица 14 - Метод аппроксимации Фогеля

	B_1 100	B_2 40	B_3 50	B_4 60
A_1 160	4 100	8	10	5 60
A_2 0	4	6	2 30	3
A_3 50	4	4 40	6 50	5

Остается только рассчитать затраты перевозок товара. Для этого понадобятся стоимость конкретной поставки к конкретному потребителю за единицу товара (транспортный тариф), умноженную на количество товара, отправленной этой поставкой. Находит затраты по формуле (3)

$$F = 4 * 100 + 5 * 60 + 2 * 30 + 4 * 40 + 6 * 50 = 1220$$

Таким образом, получаем расход на доставку товара данным методом 1220 денежных единиц.

В данном случае расход на перевозку товара от поставщика к потребителю методом наименьшей стоимости и методом аппроксимации Фогеля равен. Сделать вывод, какой из этих двух методов решения задачи более оптимален, невозможно.

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Задача 4. В таблице 15 приведены исходные данные транспортной задачи: заданы транспортные расходы на перевозку единицы груза, слева указаны возможности поставщиков, а сверху – спрос потребителей. Найдите затраты на перевозку товара от поставщика к потребителю, решая задачу методом потенциалов [8].

Таблица 15 – Метод потенциалов

	B_1 15	B_2 20	B_3 25
A_1 10	5	3	1
A_2 20	3	2	4
A_3 30	4	1	2

Проверяем задачу на закрытость.

$$\sum_{i=1}^m a_i = 10 + 20 + 30 = 60$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = 15 + 20 + 25 = 60$$

Так как $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то задача имеет закрытый тип и можно приступать к дальнейшему решению.

Составляем опорный план с помощью метода наименьше стоимости.

Начинаем с ячейки с наименьшим транспортным тарифом. Наименьший тариф имеют две ячейки: (1, 3) и (3, 2). Заполнение можем начать с любой.

Ячейку (1, 3) заполним 10 единицами товара, так как это максимальное количество товара на складе A_1 . После распределения товара поставщик A_1 в распределении товара больше не участвует, так как его запасы исчерпаны, а запрос потребителя B_3 изменился, и стал равен $b_3' = 25 - 10 = 15$ единиц товара.

Ячейку (3, 2) заполним 20 единицами товара, так как это максимальное количество товара необходимое потребителю B_2 . Количество товара на складе A_3 изменился и стал равен $a_3' = 30 - 20 = 10$ единиц товара, а потребитель B_2 в распределении товара больше не участвует.

Следующие ячейки с наименьшим транспортным тарифом: (2, 2) и (3, 3). Ячейку (2, 2) заполнить невозможно, так как запрос потребителя B_2 полностью удовлетворен.

Заполняем ячейку (3, 3) 10 единицами товара, так как количество товара, оставшееся на складе поставщика A_3 равно $a_3' = 10$. После распределения поставщик A_3 в распределении товара больше не участвует, так как его запасы исчерпаны, а запрос потребителя B_3 изменился, и стал равен $b_3'' = 15 - 10 = 5$ единиц товара.

Следующие ячейки с наименьшим транспортным тарифом: (1, 2) и (2, 1). Ячейку (1, 2) заполнить невозможно, так как запрос потребителя B_2 полностью удовлетворен.

Заполняем ячейку (2, 1) 15 единицами товара, так как это максимальное количество товара необходимое потребителю B_1 . Потребитель B_1 в распределении товара больше не участвует, так как его запрос полностью удовлетворен, а количество товара оставшееся на складе A_2 изменилось и стало равно $a_2' = 20 - 15 = 5$ единиц товара.

Следующие ячейки с наименьшим транспортным тарифом: (2, 3) и (3, 1). Ячейку (3, 1) заполнить невозможно, так как запрос потребителя B_1 полностью удовлетворен.

Заполняем ячейку (2, 3) 5 единицами товара, так как $a_2' = b_3'' = 5$ единиц товара.

Весь товар поставщиков A_1 , A_2 , A_3 был распределен между потребителями B_1 , B_2 , B_3 , тем самым удовлетворяя все потребности.

Получаем таблицу 16.

Таблица 16 – Метод потенциалов

	B ₁ 15	B ₂ 20	B ₃ 25
A ₁ 10	5	3	1 10
A ₂ 20	3 15	2	4 5
A ₃ 30	4	1 20	2 10

Проверяем опорный план на вырожденность.

План называется вырожденным, если количество базисных клеток в нем меньше, чем $m + n - 1$

Количество базисных клеток равно 5 и $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$. Можно сделать вывод, что найденный опорный план не является вырожденным.

Находим потенциалы для данного плана перевозок.

Не забываем что $u_1 = 0$.

$$v_3 = c_{11} - u_1 = 1 - 0 = 1$$

$$u_3 = c_{33} - v_3 = 2 - 1 = 1$$

$$v_2 = c_{32} - u_3 = 1 - 1 = 0$$

$$u_2 = c_{23} - v_3 = 2 - 1 = 3$$

$$v_1 = c_{12} - u_2 = 3 - 3 = 0$$

Получаем таблицу 17.

Таблица 17 – Метод потенциалов

	B ₁ 15	B ₂ 20	B ₃ 25	u
A ₁ 10	5	3	1 10	$u_1 = 0$
A ₂ 20	3 15	2	4 5	$u_2 = 3$
A ₃ 30	4	1 20	2 10	$u_3 = 1$
v	$v_1 = 0$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	

Находим оценку для всех небазисных клеток по формуле $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$, тем самым проверяем план на оптимальность.

$$\delta_{11} = c_{11} - (v_1 + u_1) = 5 - (0 + 0) = 5$$

$$\delta_{12} = c_{12} - (v_2 + u_1) = 3 - (0 + 0) = 3$$

$$\delta_{22} = c_{22} - (v_2 + u_2) = 2 - (0 + 3) = -1$$

$$\delta_{31} = c_{31} - (v_1 + u_3) = 4 - (0 + 1) = 3$$

Получаем таблицу 18.

Таблица 18 – Метод потенциалов

	B ₁ 15	B ₂ 20	B ₃ 25	<i>u</i>
A ₁ 10	⁵ 5	³ 3	¹ 10	$u_1 = 0$
A ₂ 20	³ 15	² -1	⁴ 5	$u_2 = 3$
A ₃ 30	⁴ 3	¹ 20	² 10	$u_3 = 1$
<i>v</i>	$v_1 = 0$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	

План не является оптимальным, так как оценка одной из клетки меньше нуля, а это главное правило оптимальности.

Для нахождения оптимального плана необходимо перераспределить поставки.

Найдем ячейку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной разностью δ_{ij} и построим цикл, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными.

Таблица 19 – Метод потенциалов

	B ₁ 15	B ₂ 20	B ₃ 25	<i>u</i>
A ₁ 10	⁵ 5	³ 3	¹ 10	$u_1 = 0$
A ₂ 20	³ 15	² -1	⁴ 5	$u_2 = 3$
A ₃ 30	⁴ 3	¹ 20	² 10	$u_3 = 1$
<i>v</i>	$v_1 = 0$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	

Ячейку с отрицательной оценкой небазисной клетки помечаем знаком «+», следующую «-», и так далее, поочередно.

Из выделенного цикла находим клетки со знаком «-» и выбираем ту, в которой наименьшее количество груза и вписываем его в свободную клетку со знаком «+». Затем последовательно обходим все ячейки цикла, поочередно вычитая и прибавляя к ним найденное минимальное значение.

Получаем таблицу 20.

Таблица 20 – Метод потенциалов

	B ₁	B ₂	B ₃	<i>u</i>
--	----------------	----------------	----------------	----------

	15	20	25	
A ₁ 10	⁵ 5	³ 3	¹ 10	$u_1 = 0$
A ₂ 20	³ 15	² -1 +5	⁴ 5 -5	$u_2 = 3$
A ₃ 30	⁴ 3	¹ 20 -5	² 10 +5	$u_3 = 1$
v	$v_1 = 0$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	

Опорный план изменился и принял вид таблица 21.

Таблица 21 – Метод потенциалов

	B ₁ 15	B ₂ 20	B ₃ 25
A ₁ 10	⁵	³	¹ 10
A ₂ 20	³ 15	² 5	⁴ 0
A ₃ 30	⁴	¹ 15	² 15

Клетку с нулевой поставкой делаем свободной, так как базисных клеток стало на 1 больше, и план считался бы вырожденным.

Находим потенциалы для нового опорного плана.

$$v_3 = c_{11} - u_1 = 1 - 0 = 1$$

$$u_3 = c_{33} - v_3 = 2 - 1 = 1$$

$$v_2 = c_{32} - u_3 = 1 - 1 = 0$$

$$u_2 = c_{22} - v_2 = 2 - 0 = 2$$

$$v_1 = c_{12} - u_2 = 3 - 2 = 1$$

Получаем таблицу 22.

Таблица 22 – Метод потенциалов

	B ₁ 15	B ₂ 20	B ₃ 25	u
A ₁ 10	⁵	³	¹ 10	$u_1 = 0$
A ₂ 20	³ 15	² 5	⁴	$u_2 = 2$

A_3 30	⁴	¹ 15	² 15	$u_3 = 1$
v	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	

Находим оценку для всех небазисных клеток, тем самым проверяем план на оптимальность.

$$\delta_{11} = c_{11} - (v_1 + u_1) = 5 - (1 + 0) = 4$$

$$\delta_{12} = c_{12} - (v_2 + u_1) = 3 - (0 + 0) = 3$$

$$\delta_{23} = c_{23} - (v_3 + u_2) = 4 - (1 + 2) = 1$$

$$\delta_{31} = c_{31} - (v_1 + u_3) = 4 - (1 + 1) = 2$$

Получаем таблицу 23.

Таблица 23 – Метод потенциалов

	B_1 15	B_2 20	B_3 25	u
A_1 10	⁵ ⁴	³ ³	¹ 10	$u_1 = 0$
A_2 20	³ 15	² 5	⁴ ¹	$u_2 = 2$
A_3 30	⁴ ²	¹ 15	² 15	$u_3 = 1$
v	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	

Так как оценка всех свободных клеток $\delta_{ij} \geq 0$, то план является оптимальным, и можно перейти к расчетам затрат на перевозку товара.

Находит затраты по формуле (3)

$$F = 1 * 10 + 3 * 15 + 2 * 5 + 1 * 15 + 2 * 15 = 110$$

Заключение

В работе представлено четыре метода решения транспортных задач линейного программирования. Опытным путем выявили, что наиболее оптимальное решение имеет метод потенциалов. Остальные же методы решения не являются оптимальными, но имеют свое преимущество:

- метод северо-западного угла очень прост в решении, но не является оптимальным, так как он построен без учета значений коэффициентов затрат;
- метод наименьшей стоимости тоже довольно прост в применении, и его решение близко к оптимальному, но таким не является;
- метод аппроксимации Фогеля, по крайней мере в прорешенном выше примере, имеет такие же затраты на перевозку, как и метод наименьшей стоимости, план перевозок близок к оптимальному, но таковым не является.

Транспортные задачи однозначно имеют место быть в современном мире. Нахождение оптимального плана перевозки груза от поставщика к потребителю играет важную роль как для отправителя, так и для получателя груза. Решение задач данного типа позволяет найти наиболее рациональные пути доставки товара, сократить время ожидания потребителем своего товара, и минимизировать стоимость доставки.

Библиографический список

1. Агапова Е. Г., Попова Т. М. Решение транспортной задачи с нечетко определёнными тарифами // International Journal of Advanced Studies. 2021. Т. 11. № 1. С. 34-44. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_47169975_13618295.pdf (дата обращения: 20.10.2022).
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие для ВУЗов. М.: Высшая школа, 2004. URL: <https://djvu.online/file/wfx27YiQqlFYa?ysclid=m5iy99yahb90789450> (дата обращения: 03.11.2022).
3. Апатенок Р.Ф. Математика для экономистов. М.: Просвещение, 2004. URL: https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/28993/1/978-5-7996-1108-8_2014.pdf (дата обращения: 03.11.2022).
4. Берман Н. Д., Т. С. Кузьминых Решение задач оптимизации транспортной логистики в Mathcad prime 3.1 (на примере транспортной задачи) // Лучшая научно-исследовательская работа 2017: сборник статей победителей VII Международного научно-практического конкурса, Пенза, 10 апреля 2017 года. Пенза: "Наука и Просвещение" (ИП Гуляев Г.Ю.), 2017. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28954607&ysclid=lbouur4lts51745077> (дата обращения: 03.11.2022).
5. Габасов Р. Методы линейного программирования. Часть 2. Транспортные задачи. М.: СИНТЕГ, 2018. 685 с URL: https://retrolib.pdp-11.ru/books36/1978_gabasov_kirillova_p2.pdf (дата обращения: 07.11.2022).
6. Гантимурова Ю. О., В. С. Ермолина Решение транспортных задач методом ранжирования в условиях нечетких данных // Вестник Ангарского государственного технического университета. 2023. № 17. С. 229-233. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_56140405_40306832.pdf
7. Самаров К. Л. Математика. Учебно-методическое пособие по разделу Транспортная Задача. 2009 (дата обращения: 11.10.2022). URL: <https://www.resolventa.ru/index.php/transportnaya-zadacha?ysclid=lai1klhl79712407234> (дата обращения: 09.11.2022).
8. Карасева Р. Б. Транспортная задача как фундаментальная экономико-математическая модель // Научно-методический электронный журнал "Концепт". 2016. № 11. С. 59–64. URL: <https://e-koncept.ru/2016/16237.htm> (дата обращения: 03.11.2022).
9. Курсовая работа Тема: «Транспортная задача» (дата обращения: 15.10.2022). URL: <https://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=560475#text> (дата

- обращения: 03.11.2022).
10. Методы решения транспортных задач (дата обращения: 03.11.2022). URL: https://otherreferats.allbest.ru/emodel/00016836_0.html
 11. Михалевич В. С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: моногр.. СПб.: Питер, 1986. 264 с. URL: <https://libcats.org/book/544168> (дата обращения: 03.11.2022).
 12. Николаева С. И. Методы нахождения первоначального базисного распределения поставок плана транспортной задачи // Научно-методический электронный журнал «Концепт». URL: <https://e-koncept.ru/2013/53313.htm> (дата обращения: 20.10.2022).
 13. Ноговицын, Н. А. Разработка параллельного алгоритма нахождения оптимального решения транспортной задачи / Н. А. Ноговицын // Научный альманах Центрального Черноземья. 2022. № 1-2. С. 85-89. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_48704589_91530587.pdf (дата обращения: 15.12.2022).
 14. Павлова Т.Н, Ракова О.А. Линейное программирование. Учебное пособие. Димитровград, 2002. URL: <https://elib.kstu.kz/fulltext/Skachen/Lungu%20K.N.%20Lineynoe%20programirovanie.%20Rukovodstvo%20k%20resheniyu%20zadach.pdf> (дата обращения: 20.10.2022).
 15. Просветов Г. И. Методы оптимизации. Задачи и решения. М.: Альфа-пресс, 2009. 168 с. URL: https://www.centrmag.ru/catalog/product/metody_optimizatsii_zadachi_i_resheniya_uchebno_prakticheskoe_posobie/?ysclid=m5iymzsare230624635 (дата обращения: 18.10.2022).
 16. Решение закрытой транспортной задачи по критерию стоимости. URL: <https://lektsii.org/13-65913.html> (дата обращения: 20.10.2022).
 17. Решение транспортных задач с помощью MS Excel. URL: <https://lektsii.org/13-65913.html> (дата обращения: 12.12.2022).
 18. Цыплакова О.Н., Цысь Ю.В., Кобылина А.В. Транспортная задача и её применение в решении экономических задач // Современные наукоемкие технологии. 2014. № 5-2. С. 178-180. URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=34054> (дата обращения: 15.12.2022).
 19. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования. Задачи транспортного типа. М.: ИЛ, 2010. 476 с. URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=34054> (дата обращения: 15.12.2022).