

Методы использования производной для поиска точек экстремума функции

Останкова Анастасия Николаевна

Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема

Студент

Аннотация

Данная тема посвящена изучению способов применения производной функции для нахождения её экстремальных значений максимумов и минимумов. Рассматриваются основные понятия, такие как точки критические, где производная равна нулю или не существует, а также условия первого и второго порядка, позволяющие классифицировать эти точки как локальные экстремумы. Особое внимание уделяется использованию первой производной для выявления возрастания и убывания функции, а второй производной для определения характера критической точки.

Ключевые слова: Математический анализ, точки экстремума, теорема Ферма.

Methods for using the derivative to find extrema of a function

Ostankova Anastasia Nikolaevna

Sholom-Aleichem Priamursky State University

Student

Abstract

This topic focuses on exploring the application of the derivative of a function to find its extreme values, such as maxima and minima. It covers essential concepts like critical points where the derivative is equal to zero or non-existent, as well as first- and second-order conditions that classify these points as local extrema. The article emphasizes the use of the first derivative to identify the increasing and decreasing behavior of a function, while the second derivative is utilized to determine the nature of a critical point.

Keywords: Mathematical analysis, extremum points, Fermat's theorem

1 Введение

1.1 Актуальность исследования

Методы нахождения экстремумов с помощью производной актуальны, так как они позволяют быстро и эффективно определять точки максимума и минимума функций. Это важно для решения задач оптимизации в науке, технике и экономике. Использование производной помогает анализировать поведение функций, выявлять критические точки и принимать обоснованные решения. Современные вычислительные технологии делают эти методы

универсальными и удобными для применения как в простых, так и в сложных математических моделях.

1.2 Обзор исследований

И.В. Ананченко написал работу о разработанном комплексе программ, позволяющем находить экстремум целевой функции. Написанные на разных языках программирования (C#, Visual Basic, Python, Java) программы используют методы прямого поиска для нахождения экстремума целевой функции. Методы прямого поиска для нахождения экстремального значения целевой функции используют только вычисляемые значения самой функции (методы оптимизации нулевого порядка) без использования первой и второй производных функции. Вычисление производных позволяет судить о направлении (первая производная) и скорости изменения (вторая производная) функции, а, значит, более эффективно проводить поиск экстремума функции. Однако нахождение первой производной (методы оптимизации первого порядка) и первой и второй производной функции (методы оптимизации второго порядка) требует дополнительных вычислений и усложняет алгоритм поиска, поэтому методы прямого поиска являются вполне конкурентноспособными и используются на практике для поиска минимума или максимума целевой функции. В программном комплексе реализованы методы оптимизации: Хука-Дживса и симплексный метод. В разработке методы: Гаусса-Зейделя, Нелдера и Мида, комплекс-метод Бокса. Цель разработки комплекса - написать программы оптимизации на разных языках программирования для наиболее широко используемых алгоритмов оптимизации и предоставить всем желающим доступ к исходному коду этих программ [1]. В работе И.В. Баран формулируется и исследуется задача поиска направления оптимального перехода (по диаметру) через точку минимума. Эта задача близка по духу, с одной стороны, к хорошо известной в современном анализе задаче поиска направления наискорейшего (радиального) спуска к точке минимума, а с другой стороны, к известному методу Гельфанда (диаметрального) перехода через точку минимума. Оказалось, что для исследования такой задачи удобно использовать симметрические, а не центрированные характеристики (симметрические дифференциалы, либо, в более общем случае, симметрические субдифференциалы первого и второго порядка). Подробно исследован случай вариационных функционалов, рассмотрен класс примеров [2]. В статье И.В.Шевелёва рассматривается актуальная проблема поиска точек экстремума наиболее точным и быстрым способом. Оцениваются два метода поиска точек экстремума: 1) Монте-Карло; 2) квази-Монте-Карло. Получены приемлемые результаты оценок. Составлен алгоритм нахождения точек экстремума для дальнейшего прикладного применения [3].

1.3.Цель исследования

Цель исследования - разбор метода для решения задачи по отысканию точек экстремума функции при применении производных.

2. Методы исследования

В математическом анализе производная функции играет ключевую роль в исследовании её свойств. Для начала стоит ознакомиться с данным термином.

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращений:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При условии, что он существует [1].

Геометрический смысл производной заключается в том, что значение производной функции в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Пусть дан график функции $y=f(x)$ (Рис. 1).

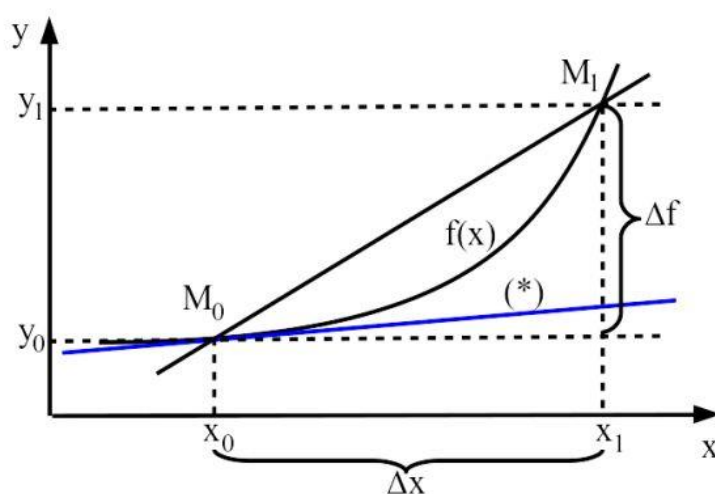


Рисунок 1. График касательной

Устремив точку M_1 к точке M_0 при $\Delta x \rightarrow 0$ секущая M_0M_1 станет прямой, которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.

Предельное положение секущей M_0M_1 при $\Delta x \rightarrow 0$ называется наклонной касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

По определению производной предельный переход секущей при $\Delta x \rightarrow 0$ даёт уравнение касательной.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Отсюда следует геометрический смысл производной [4].

Для нахождения точек максимума и минимума используют производную.

Если для функции $f(x)$, определённой в некоторой области, в некоторой окрестности точки M_0 верно неравенство:

$$f(x_0) > f(x)$$

То говорят, что точка x_0 называется точкой максимума.

Если для функции $z=f(x, y)$, определённой в некоторой области, в некоторой окрестности точки M_0 верно неравенство:

$$f(x_0) < f(x)$$

То говорят, что точка x_0 называется точкой минимума [5].

Существует множество методов для поиска точек экстремума. Одним из основных методов является метод отыскания данных точек при помощи первой и второй производной.

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если x_0 — точка локального экстремума $f(x)$, то $f'(x) = 0$.

Алгоритм поиска точек экстремума с помощью второй производной:

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки, в которых $f'(x) = 0$.
3. Найти вторую производную $f''(x)$.
4. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек.

Если при этом $f''(x) < 0$, то функция в такой точке имеет максимум, а если $f''(x) > 0$, то — минимум.

Если же $f''(x) = 0$, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.

5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

3. Результаты и обсуждения

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 4x},$$

Областью определения данной элементарной функции является вся числовая ось, т.к. кубический корень не требует никаких ограничений: x принадлежит $\mathbb{R}$.

$$\text{Вычислим производную: } y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x-4}{\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$$

$$\text{Приравняем производную к нулю: } \frac{1}{3} \cdot \frac{2x-4}{\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}} = 0, \quad x = 2$$

Следовательно точка $x = 2$ критическая точка первого рода.

Критическая точка первого рода является точкой излома функции $y = f(x)$, если в этой точке производная терпит разрыв (за исключением случая бесконечных односторонних производных одного знака).

Найдём точки, где производная не существует.

$$\sqrt[3]{(x^2-4x)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Эти точки принадлежат ООФ, значит, они являются критическими точками первого рода. Здесь учтено, функция в этих точках непрерывна, т.к. она элементарна и определена в них. Нанесем на числовую ось ООФ, критические точки первого рода, определим знак производной на получившихся интервалах (Рис. 2).

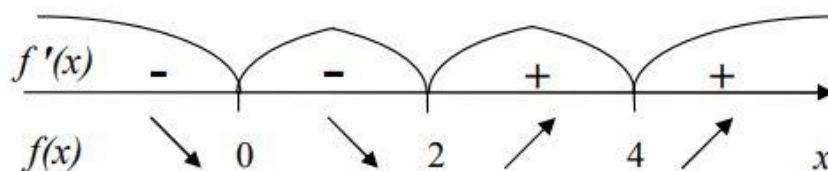


Рисунок 2. Отыскание знака

Точки $x = 0$, $x = 4$, не являются точками экстремума, т.к. в них производная не меняет знак. А точка $x = 2$ есть точка минимума, потому что в ней убывающая часть графика сменяется на возрастающую. Для завершения исследования вычислим значение функции в точке минимума:

$$y(2) = \sqrt[3]{2^2 - 4 \cdot 2} = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

График функции изображён на (рис. 3).

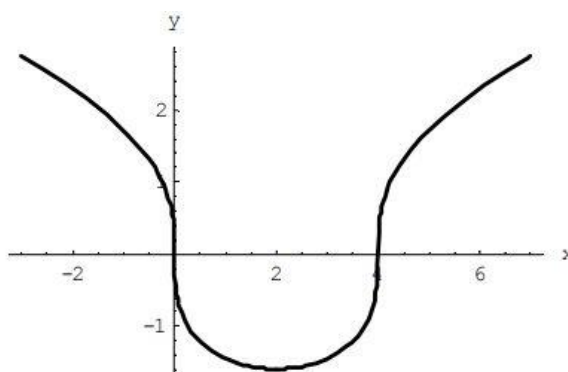


Рисунок 3. График функции

Выводы

Разобраны задачи по отысканию точек экстремума функции при применении производных.

Библиографический список

1. Ананченко И.В., Ершов Е.Ю., Караджаев М.М., Кравцов А.А. Разработка комплекса программ для поиска экстремума целевой функции с использованием методов многомерной оптимизации нулевого порядка. // Сборник статей XXVIII Международного научно-исследовательского конкурса. 2020. С. 13-18.
2. Баран И.В. Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума // Динамические системы. 2016. С. 337-354.
3. Шевелёв Н.В. Поиск точек экстремума методом Квази-Монте-Карло // Дни науки и инноваций НОВГУ. 2020. С. 228-234.
4. Матвеева Т.А., Рыжкова Н.Г. Математический анализ. Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2017. 98 с.
5. Веселова Е.М., Максимова Н.Н. Математический анализ. Экстремум функции нескольких переменных. Благовещенск: АмГУ., 2021. 39 с.