УДК 517.518.8, 519.651

Приближение элементарных функций многочленами Чебышёва

Беляева Евгения Алексеевна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, студент

Эйрих Надежда Владимировна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики, информационных технологий и техники

Аннотация
В работе получены приближение по чебышёвским многочленам 20-го порядка функций e^x, $\cos x$ и $\sin x$. Реализованы разложения путем замены в соответствующих многочленах Тейлора степеней x на многочлены Чебышёва. На конкретных примерах показано, что приближение k-го порядка по чебышёвским многочленам дает погрешность в разы меньшую по сравнению с соответствующими многочленами Тейлора k-го порядка. Все вычисления проведены в системе Maple.
Ключевые слова: многочлены Чебышёва, многочлены Тейлора, приближение элементарных функций.

Approximation of elementary functions by Chebyshev polynomials

Belyeva Evgeniya Alekseevna
Sholom-Aleichem Priamursky State University, student

Eyrikh Nadezhda Vladimirovna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
PhD in Mathematics, Associate Professor, Dean of the Department of Mathematics, IT and Techniques

Abstract
An approximation is obtained for Chebyshev polynomials of the 20th order of functions e^x, $\cos x$ и $\sin x$. Expansions are obtained by replacing the corresponding Taylor polynomials of degrees x by the Chebyshev polynomials. By concrete examples it is shown that the k -order approximation in Chebyshev polynomials gives an error many times smaller than the corresponding Taylor polynomials of the k - order. All calculations are performed in the Maple system.
Keywords: Chebyshev polynomials, Taylor polynomials, approximation of elementary functions.

Великий русский математик П.Л. Чебышёв построил наименее отклоняющиеся от нуля многочлены, названные его именем. Эти многочлены широко применялись на практике, например, при интерполировании в астрономии и артиллерии. Н.В. Маиевский по интерполяционной формуле Чебышёва определил данные для таблиц стрельб из орудий. Полученные П.Л. Чебышёвым результаты Ж. Бертран назвал чудом анализа [3].

Со времени создания И. Ньютоном и Г. Лейбницем математического анализа основным средством представления и вычисления функций являлись степенные ряды. Они широко использовались при дифференцировании и интегрировании функций, что позволило решать с их помощью уравнения, в том числе и дифференциальные. В дальнейшем Д. Бернулли, Л. Эйлером, А. Лежандром и многими другими знаменитыми математиками было установлено, что ценным способом представления и вычисления функций являются их разложения в тригонометрические ряды и ряды по различным системам ортогональных многочленов и вообще ортогональных функций. В 20-30-х годах двадцатого века выяснилось, что среди всего этого разнообразия разложений особое положение занимают разложения функций в ряды по многочленам Чебышёва первого рода [4].

Замечательное свойство многочленов Чебышёва наименее отклоняться от нуля на отрезке $[-1, 1]$ обеспечивает обычно более быструю сходимость разложений функций в ряд по многочленам Чебышёва по сравнению с их разложениями в степенной ряд или в ряд по другим специальным многочленам или функциям [4].

Именно поэтому многочлены Чебышёва играют фундаментальную роль в теории и практике использования численных методов. С их помощью решается значительная часть задач оптимизации свойств вычислительных алгоритмов [1].

Многочлены Чебышёва также часто встречаются во многих других областях математики: теории чисел, топологии трехмерных многообразий и др. [5].

Многочленами Чебышёва первого рода называют многочлены $T_n(x)$, $n \geq 0$, определенные рекуррентным соотношением

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{1}$$

и начальными условиями

$$T_0(x) = 1 \text{ и } T_1(x) = x. \tag{2}$$

Многочлен Чебышёва первого рода $T_n(x)$ характеризуется как многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}, который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Среди всех многочленов, значения которых на отрезке $[-1, 1]$ не превосходят по модулю 1, многочлен Чебышёва имеет наибольший старший коэффициент и наибольшее значение в любой точке за пределами $[-1, 1]$.

Используя рекуррентное соотношение (1) и начальные условия (2), вычислим первые двадцать многочленов Чебышева:

$T_0(x)=1$,

$T_1(x)=x$,

$T_2(x)=2x^2-1$,

$T_3(x)=4x^3-3x$,

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$,

$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$,

$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$,

$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$,

$T_8(x)=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$,

$T_9(x)=256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x$,

$T_{10}(x)=512x^{10}-1280x^8+1120x^6-400x^4+50x^2-1$,

$T_{11}(x)=1024x^{11}-2816x^9+2816x^7-1232x^5+220x^3-11x$,

$T_{12}(x)=2048x^{12}-6144x^{10}+6912x^8-3584x^6+840x^4-72x^2+1$,

$T_{13}(x)=4096x^{13}-13312x^{11}+16640x^9-9984x^7+2912x^5-364x^3+13x$,

$$T_{14}(x)=8192x^{14}-28672x^{12}+39424x^{10}-26880x^8+9408x^6-1568x^4+ \\ +98x^2-1,$$

$$T_{15}(x)=16384x^{15}-61440x^{13}+92160x^{11}-70400x^9+28800x^7-6048x^5+ \\ +560x^3-15x,$$

$$T_{16}(x)=32768x^{16}-131072x^{14}+212992x^{12}-180224x^{10}+84480x^8-21504x^6+ \\ +2688x^4-128x^2+1,$$

$$T_{17}(x)=65536x^{17}-278528x^{15}+487424x^{13}-452608x^{11}+239360x^9- \\ -71808x^7+11424x^5-816x^3+17x,$$

$$T_{18}(x)=131072x^{18}-589824x^{16}+1105920x^{14}-1118208x^{12}+658944x^{10}- \\ -228096x^8+44352x^6-4320x^4+162x^2-1,$$

$$T_{19}(x)=262144x^{19}-1245184x^{17}+2490368x^{15}-2723840x^{13}+1770496x^{11}- \\ -695552x^9+160512x^7-20064x^5+1140x^3-19x,$$

$$T_{20}(x)=524288x^{20}-2621440x^{18}+5570560x^{16}-6553600x^{14}+4659200x^{12}+ \\ +2050048x^{10}+549120x^8-84480x^6+6600x^4-200x^2+1.$$

Выразим степени x через многочлены Чебышева:

$1=T_0(x)$,

$x=T_1(x)$,

$$x^2=\frac{1}{2}\left(T_2(x)+T_0(x)\right),$$

$$x^3=\frac{1}{4}\left(T_3(x)+3T_1(x)\right),$$

$$x^4=\frac{1}{8}\left(T_4(x)+4T_2(x)+3T_0(x)\right),$$

$$x^5=\frac{1}{16}\left(T_5(x)+5T_3(x)+10T_1(x)\right),$$

$$x^6=\frac{1}{32}\left(T_6(x)+6T_4(x)+15T_2(x)+10T_0(x)\right),$$

$$x^7=\frac{1}{64}\left(T_7(x)+7T_5(x)+21T_3(x)+35T_1(x)\right),$$

$$x^8=\frac{1}{128}\left(T_8(x)+8T_6(x)+28T_4(x)+56T_2(x)+35T_0(x)\right),$$

$$x^9=\frac{1}{256}\left(T_9(x)+9T_7(x)+36T_5(x)+84T_3(x)+126T_1(x)\right),$$

$$x^{10}=\frac{1}{512}\left(T_{10}(x)+10T_8(x)+45T_6(x)+120T_4(x)+210T_2(x)+126T_0(x)\right),$$

$$x^{11}=\frac{1}{1024}\left(T_{11}(x)+11T_9(x)+55T_7(x)+165T_5(x)+330T_3(x)+462T_1(x)\right),$$

$$x^{12}=\frac{1}{2048}\left(T_{12}(x)+12T_{10}(x)+66T_8(x)+220T_6(x)+495T_4(x)+792T_2(x)+\right.$$
$$\left.+462T_0(x)\right),$$

$$x^{13}=\frac{1}{4096}\left(T_{13}(x)+13T_{11}(x)+78T_9(x)+286T_7(x)+715T_5(x)+1287T_3(x)+\right.$$
$$\left.+1716T_1(x)\right),$$

$$x^{14}=\frac{1}{8192}\left(T_{14}(x)+14T_{12}(x)+91T_{10}(x)+364T_8(x)+1001T_6(x)+2002T_4(x)+\right.$$
$$\left.+3003T_2(x)+1716T_0(x)\right),$$

$$x^{15}=\frac{1}{16384}\left(T_{15}(x)+15T_{13}(x)+105T_{11}(x)+455T_9(x)+1365T_7(x)+3003T_5(x)+\right.$$
$$\left.+5005T_3(x)+6435T_1(x)\right),$$

$$x^{16}=\frac{1}{32768}\left(T_{16}(x)+16T_{14}(x)+120T_{12}(x)+560T_{10}(x)+1820T_8(x)+4368T_6(x)+\right.$$
$$\left.+8008T_4(x)+11440T_2(x)+6435T_0(x)\right),$$

$$x^{17}=\frac{1}{65536}\left(T_{17}(x)+17T_{15}(x)+136T_{13}(x)+680T_{11}(x)+2380T_9(x)+6188T_7(x)+\right.$$
$$\left.+12376T_5(x)+19448T_3(x)+24310T_1(x)\right),$$

$$x^{18}=\frac{1}{131072}\left(T_{18}(x)+18T_{16}(x)+153T_{14}(x)+816T_{12}(x)+3060T_{10}(x)+8568T_{8}(x)+\right.$$
$$\left.+18564T_{6}(x)+31824T_{4}(x)+43758T_{2}(x)+24310T_{0}(x)\right),$$
$$x^{19}=\frac{1}{262144}\left(T_{19}(x)+19T_{17}(x)+171T_{15}(x)+969T_{13}(x)+3876T_{11}(x)+11628T_{9}(x)+\right.$$
$$\left.+27132T_{7}(x)+50388T_{5}(x)+75582T_{3}(x)+92378T_{1}(x)\right),$$
$$x^{20}=\frac{1}{524288}\left(T_{20}(x)+20T_{18}(x)+190T_{16}(x)+1140T_{14}(x)+4845T_{12}(x)+15504T_{10}(x)+\right.$$
$$\left.+38760T_{8}(x)+77520T_{6}(x)+125970T_{4}(x)+167960T_{2}(x)+92378T_{0}(x)\right).$$

Используя полученные формулы для различных степеней x, реализуем разложение по многочленам Чебышёва для некоторых элементарных функций. Для этого в соответствующем разложении Тейлора, сходящемся на отрезке $[-1,1]$, заменяем степени x на их выражения через многочлены Чебышёва [2].

Пример 1. Для экспоненты разложение Тейлора имеет вид:

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{20}\frac{x^{n}}{n!}+r_{20}(x),$$

тогда разложение для этой функции по многочленам Чебышёва:

$$e^{x}=\frac{1748164445130805960 1}{13807847410237440000}T_0(x)+\frac{7962888439219129}{7044820107264000}T_1(x)+$$
$$+\frac{2061821421482423437}{7594316075630592000}T_2(x)+\frac{6235334287935691}{140635482882048000}T_3(x)+$$
$$+\frac{719880730584581}{131503308668928000}T_4(x)+\frac{343596168204241}{632859672969216000}T_5(x)+$$
$$+\frac{740072681293037}{16454351497199616000}T_6(x)+\frac{3759156985273}{1175310821228544000}T_7(x)+$$
$$+\frac{6555824359057}{32908702994399232000}T_8(x)+\frac{10089051187}{914130638733312000}T_9(x)+$$
$$+\frac{6471139243}{11753108212285440000}T_{10}(x)+\frac{205511281}{8227175748599808000}T_{11}(x)+$$
$$+\frac{273577217}{263269623955193856000}T_{12}(x)+\frac{187639}{4701243284914176000}T_{13}(x)+$$
$$+\frac{1593037}{1118895901809573888000}T_{14}(x)+\frac{421}{8880126204837888000}T_{15}(x)+$$
$$+\frac{9937}{6713375410857443328000}T_{16}(x)+\frac{73}{1678343852714360832000}T_{17}(x)+$$
$$+\frac{1}{828273589651243008000}T_{18}(x)+\frac{1}{318885332015728558080 00}T_{19}(x)+$$

$$+\frac{1}{1275541328062914232320000}T_{20}(x)+r_{20}(x).$$

Оценим абсолютную погрешность, которую дают приближение функции e^x по чебышёвским многочленам 3-го порядка

$$CH_3(x)=0{,}9945705382+0{,}9973076584x+0{,}5429906791x^2+0{,}1773473994x^3$$

и многочлен Тейлора 3-го порядка

$$TL_3(x)=1+x+0{,}5x^2+0{,}1666666667x^3.$$

Для этого вычислим значения $TL_3(x)$ и $CH_3(x)$ на отрезке $[0;1]$ (табл.1).

Таблица 1 – Значения $TL_3(x)$ и $CH_3(x)$ для $x\in[0;1]$

x_i	$TL_3(x_i)$	$\left\|e^{x_i}-TL_3(x_i)\right\|$	$CH_3(x_i)$	$\left\|e^{x_i}-CH_3(x_i)\right\|$
0	1,0	0,0	0,9945705382	0,005429461782
0,1	1,105166667	0,000004251	1,099908558	0,005262360
0,2	1,221333333	0,000069425	1,217170477	0,004232281
0,3	1,349500000	0,000358808	1,347420377	0,002438431
0,4	1,490666667	0,001158031	1,491722344	0,000102354
0,5	1,645833333	0,002887938	1,651140462	0,002419191
0,6	1,816000000	0,006118800	1,826738817	0,004620017
0,7	2,002166667	0,011586040	2,019581490	0,005828783
0,8	2,205333333	0,020207595	2,230732568	0,005191640
0,9	2,426500000	0,033103111	2,461256136	0,001653025
1,0	2,666666667	0,051615161	2,712216276	0,006065552

Анализируя данные таблицы 1, заключаем, что лучшее приближение на отрезке $[0;0{,}3]$ дает многочлен Тейлора $TL_3(x)$, а приближение по многочленам Чебышёва $CH_3(x)$ дает более точный результат на отрезке $[0{,}4;1]$. Более оптимальное приближение экспоненты по чебышёвским многочленам, в сравнении с разложением Тейлора, на отрезке $[0{,}5;1]$ проиллюстрировано графиками этих функций (рис. 1).

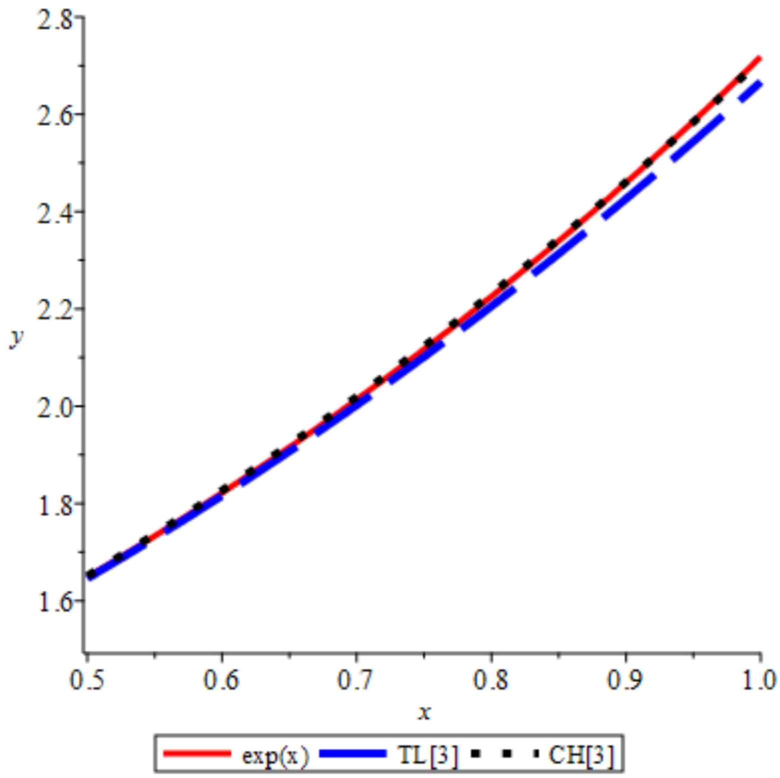

Рисунок 1 – Графики функций e^x, $TL_3(x)$, $CH_3(x)$, $x \in [0{,}5;\ 1]$

Сравним значения в точке $x=1$ приближений экспоненты по чебышёвским многочленам

$$CH_2(x) = 0{,}9945705382{+}1{,}130318208x{+}0{,}5429906791x^2,$$
$$CH_3(x) = 0{,}9945705382 + 0{,}9973076584x + 0{,}5429906791x^2 + 0{,}1773473994x^3,$$
$$CH_4(x) = 1{,}000044779{+}0{,}973076584x{+}0{,}4991967555x^2{+}0{,}1773473994x^3{+}$$
$$+\,0{,}04379392354x^4,$$
$$CH_5(x) = 1{,}000044779{+}1{,}000022290x{+}0{,}4991967555x^2{+}0.1664888732x^3{+}$$
$$+\,0{,}04379392354x^4{+}0{,}008686820991x^5,$$
$$CH_6(x) = 0{,}9999998013{+}1{,}000022290x{+}1{,}00002229x^2{+}0.1664888732x^3{+}$$
$$+\,0{,}04163501203x^4{+}0{,}008686820991x^5{+}0{,}001439274335x^6,$$

с соответствующими разложениями Тейлора

$$TL_2(x) = 1{+}x{+}0{,}5x^2,$$
$$TL_3(x) = 1 + x + 0{,}5x^2 + 0{,}1666666667x^3,$$
$$TL_4(x) = 1{+}x{+}0{,}5x^2{+}0{,}1666666667x^3 + 0{,}04166666667x^4,$$
$$TL_5(x) = 1{+}x{+}0{,}5x^2{+}0{,}1666666667x^3 + 0{,}04166666667x^4 + 0{,}008333333333x^5,$$

$$TL_6(x) = 1 + x + 0{,}5x^2 + 0{,}1666666667x^3 + 0{,}04166666667x^4 + 0{,}00833333333x^5 + \\ + 0{,}001388888889x^6.$$

Сравнивая абсолютные погрешности для приближений одного порядка, замечаем, что разложение Тейлора $TL_2(x)$ дает погрешность в 4 раза большую, чем $CH_2(x)$, $TL_3(x)$ дает погрешность в 8 раз большую, чем $CH_3(x)$, а у $TL_4(x)$ погрешность в 16 раз больше, чем у $CH_4(x)$ (табл. 2).

Таблица 2 – Значения $TL_i(x)$ и $CH_i(x)$, $i = 2{,}3{,}4{,}5{,}6$ для e^x в точке $x = 1$

i	$TL_i(1)$	$\lvert e - TL_i(1)\rvert$	$CH_i(1)$	$\lvert e - CH_i(1)\rvert$
2	2,500000000	0,218281828	2,667879426	0,050402402
3	2,666666667	0,051615161	2,712216276	0,006065552
4	2,708333334	0,009948494	2,717690516	0,000591312
5	2,716666667	0,001615161	2,718233442	0,000048386
6	2,718055556	0,000226272	2,718278419	0,000003409

Пример 2. Разложение Тейлора для функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{17}}{17!} - \frac{x^{19}}{19!} + r_{20}(x),$$

тогда разложение для этой функции по многочленам Чебышёва:

$$\sin x = \frac{3038075670375824 39}{345196185255936000}T_1(x) - \frac{165078104048700 49}{421906448646144000}T_3(x) + \\ + \frac{316123190926031}{632859672969216000}T_5(x) - \frac{321036325499}{106846438293504000}T_7(x) + \\ + \frac{28791002519}{27423919161999360 00}T_9(x) - \frac{197124241}{822717574859980 8000}T_{11}(x) + \\ + \frac{1267391}{329087029943992320 00}T_{13}(x) - \frac{779}{169529682092359680 00}T_{15}(x) + \\ + \frac{71}{167834385271436083 2000}T_{17}(x) - \frac{1}{318885332015728558 08000}T_{19}(x) + r_{20}(x).$$

Сравним приближения i-го порядка ($i = 3{,}5{,}7$) функции $\sin x$ по чебышёвским многочленам:

$CH_3(x) = 0{,}9974812954x - 0{,}1565068319x^3$,

$CH_5(x) = 0{,}9999788727x - 0{,}1664971411x^3 + 0{,}007992247367x^5$,

$$CH_7(x) = 0{,}9999999052x - 0{,}1666654016x^3 + 0{,}00832876835x^5 - \\ - 0{,}0001922977046x^7$$

с соответствующими многочленами Тейлора

$$TL_3(x) = x - 0{,}1666666667x^3,$$
$$TL_5(x) = x - 0{,}1666666667x^3 + 0{,}008333333333x^5,$$
$$TL_7(x) = x - 0{,}1666666667x^3 + 0{,}008333333333x^5 - 0{,}0001984126984x^7.$$

Для функции $\sin x$ разложение Тейлора $TL_3(x)$ дает абсолютную погрешность в 16 раз большую, чем $CH_3(x)$, а у $TL_5(x)$ погрешность в 65 раз больше, чем у $CH_5(x)$ (табл. 3). Графики функции $\sin x$ и её приближений 3-го порядка $TL_3(x)$ и $CH_3(x)$ представлены на рисунке 2.

Таблица 3 – Значения $TL_i(x)$ и $CH_i(x)$, $i = 3,5,7$ для $\sin x$ в точке $x = 1$

i	$TL_i(1)$	$\lvert\sin(1) - TL_i(1)\rvert$	$CH_i(1)$	$\lvert\sin(1) - CH_i(1)\rvert$
3	0,8333333333	0,0081376515	0,8409744635	0,0004965213
5	0,8416666666	0,0001956818	0,8414739790	0,0000029942
7	0,8414682539	0,0000027309	0,8414709743	$1{,}05 \cdot 10^{-8}$

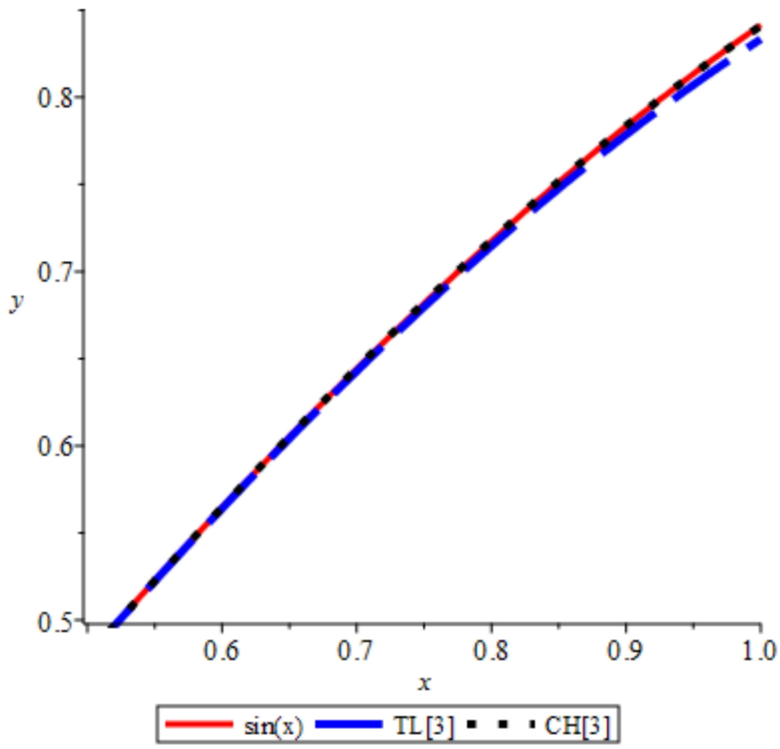

Рисунок 2 – Графики функций $\sin x$, $TL_3(x)$, $CH_3(x)$, $x \in [0{,}5; 1]$

Пример 3. Из разложения Тейлора для функции $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{16!} - \frac{x^{18}}{18!} + \frac{x^{20}}{20!} + r_{21}(x)$$

получаем разложение для этой функции по многочленам Чебышёва:

$$\begin{aligned}\cos x = {}& \frac{3521910964886366267}{4602615803412480000}T_0(x) - \frac{3490453531057237 27}{1518863215126118400}T_2(x) + \\ & + \frac{50155677596462209}{1012575476750745600 0}T_4(x) - \frac{229684515505657}{5484783832399872000}T_6(x) + \\ & + \frac{1240308503549}{6581740598879846400}T_8(x) - \frac{43285065899}{822717574859980800 00}T_{10}(x) + \\ & + \frac{17550319}{17551308263679590400}T_{12}(x) - \frac{1540811}{1118895901809573888000}T_{14}(x) + \\ & + \frac{9649}{671337541085744332800 0}T_{16}(x) - \frac{1}{850360885375276154880}T_{18}(x) + \\ & + \frac{1}{1275541328062914232320000}T_{20}(x) + r_{21}(x).\end{aligned}$$

Сравним приближения i-го порядка ($i = 2,4,6$) функции $\cos x$ по чебышёвским многочленам:

$$CH_2(x) = 0{,}9950046564 - 0{,}4596139397x^2,$$
$$CH_4(x) = 0{,}9999579343 - 0{,}4992401632x^2 + 0{,}03962622343x^4,$$
$$CH_6(x) = 0{,}9999998110 - 0{,}4999939433x^2 + 0{,}04163630387x^4 - 0{,}001340053632x^6$$

с соответствующими разложениями Тейлора

$$TL_2(x) = 1 - 0{,}5x^2,$$
$$TL_4(x) = 1 - 0{,}5x^2 + 0{,}04166666667x^4,$$
$$TL_6(x) = 1 - 0{,}5x^2 + 0{,}04166666667x^4 - 0{,}001388888889x^6.$$

Для функции $\cos x$ разложение Тейлора $TL_2(x)$ дает абсолютную погрешность в 8 раз большую, чем $CH_2(x)$, абсолютная погрешность $TL_4(x)$ в 24 раза больше, чем у $CH_4(x)$, а у $TL_6(x)$ погрешность в 110 раз больше, чем у $CH_6(x)$ (табл. 4). Графики функции $\cos x$ и её приближений 2-го порядка $TL_2(x)$ и $CH_2(x)$ представлены на рисунке 3.

Таблица 4 – Значения $TL_i(x)$ и $CH_i(x)$, $i = 2,4,6$ для $\cos x$ в точке $x = 1$

i	$TL_i(1)$	$\lvert\cos(1) - TL_i(1)\rvert$	$CH_i(1)$	$\lvert\cos(1) - CH_i(1)\rvert$
2	0,5000000000	0,0403023059	0,5353907167	0,0049115892
4	0,5416666667	0,0013643608	0,5403439946	0,0000416887
6	0,5402777778	0,0000245281	0,5403021179	$1{,}880 \cdot 10^{-7}$

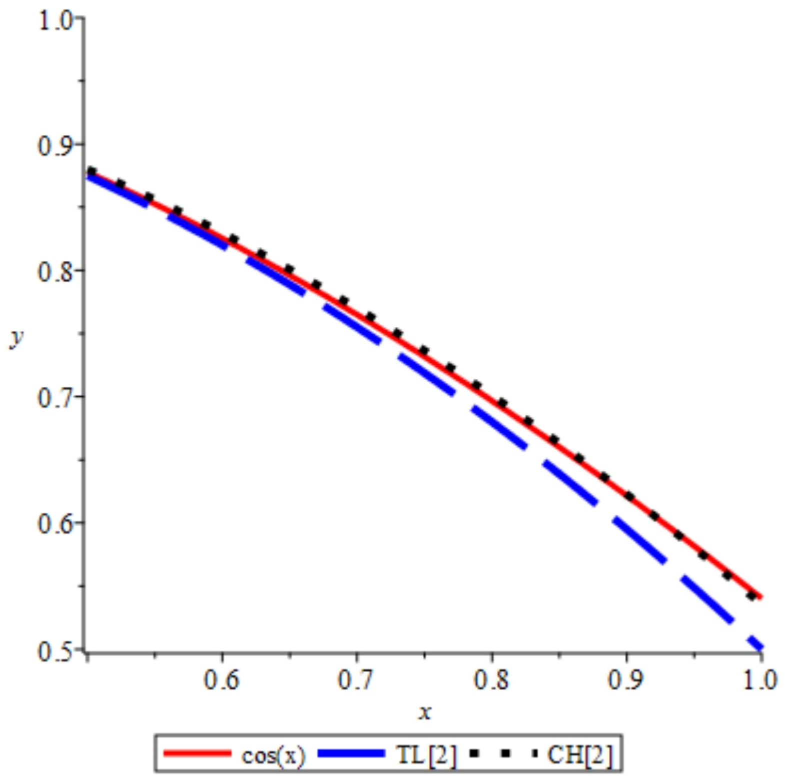

Рисунок 3 – Графики функций $\cos x$, $TL_2(x)$, $CH_2(x)$, $x \in [0{,}5;\, 1]$

Таким образом, запись многочленов в традиционной форме (многочленами Тейлора) приводит к большому влиянию вычислительной погрешности. Поэтому приближение элементарных функций целесообразнее записывать в виде линейных комбинаций многочленов Чебышёва, что позволяет вычислять значения функций при заданной точности по меньшему числу слагаемых.

Благодаря своим свойствам многочлены Чебышёва относят к наиболее важным среди разнообразных систем многочленов. В математике эти многочлены заняли исключительное положение как важнейшее средство теоретических и практических исследований, особенное место отводится многочленам Чебышёва в современной вычислительной математике [4].

Библиографический список

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для

 ISSN 2414-4487

инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
3. Никифоровский В.А. Пафнутий Чебышёв – человек, математик, педагог (1821-1894) // Вестник Российской Академии наук. 1995. Т. 65. № 5. С. 448-451.
4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
5. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.