УДК 517.518.8, 519.651

Аппроксимация функций многочленами Лежандра в системе Maple

Ушакова Ирина Андреевна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
магистрант

Эйрих Надежда Владимировна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики, информационных технологий и техники

Аннотация
Получены многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения степени не выше 7-ой для функций e^x, cos$x$, sin$x$, заданных на отрезке $[a;b] \neq [-1;1]$. Все вычисления произведены в системе Maple.
Ключевые слова: многочлены Лежандра, многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения, ортогональная система многочленов.

Approximation of functions by Legendre polynomials in the Maple system

Ushakova Irina Andreevna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
postgraduate

Eyrikh Nadezhda Vladimirovna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
PhD in Mathematics, Associate Professor, Dean of the Department of Mathematics, IT and Techniques

Abstract
The polynomials of the best mean-square approximation of degree at most 7th are obtained for the functions e^x, cos$x$, sin$x$, given on the interval $[a;b] \neq [-1;1]$. All calculations are performed in the Maple system.
Keywords: the Legendre polynomials, best approximation polynomial, orthogonal system of polynomials

В теории многочленов от одной переменной немаловажное значение имеют многочлены Лежандра, которые были введены в 1784 г. французским математиком Адриен Мари Лежандром (A.M. Legendre) [1,5].

Многочлены Лежандра имеют широкое применение, в частности, они участвуют в образовании сферических функций, в которых решается ряд задач математической физики [2].

Полиномы Лежандра относятся к классическим ортогональным многочленам и обозначаются $P_n(x)$ [3,4].

Для определения многочленов Лежандра можно воспользоваться формулой Родрига:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,\ n=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Из (1) следует, что $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$. Для следующих значений n удобнее воспользоваться рекуррентной формулой

$$P_n(x)=\frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}(x). \tag{2}$$

Используя соотношение (2) в системе Maple были вычислены первые двадцать многочленов Лежандра (рис. 1).

$> P0 := 1:$

$> P[1] := x:$

$> P[2] := \frac{(2\cdot 2+1)}{(2+1)}\cdot x\cdot P[1]-\frac{2}{2+1}\cdot P0$

$$P_2 := \frac{5}{3}x^2-\frac{2}{3}$$

$>$ **for** n **from** 2 **to** 20 **do** $P[n+1] := simplify\left(\frac{(2\cdot n+1)}{(n+1)}\cdot x\cdot P[n]-\frac{n}{n+1}\cdot P[n-1]\right)$ **od**

$$P_3 := \frac{25}{9}x^3-\frac{16}{9}x$$

$$P_4 := \frac{175}{36}x^4-\frac{157}{36}x^2+\frac{1}{2}$$

$$P_5 := \frac{35}{4}x^5-\frac{1813}{180}x^3+\frac{209}{90}x$$

$$P_6 := \frac{385}{24}x^6-\frac{1351}{60}x^4+\frac{947}{120}x^2-\frac{5}{12}$$

$$P_7 := \frac{715}{24}x^7-\frac{2959}{60}x^5+\frac{6521}{280}x^3-\frac{387}{140}x$$

$$P_8 := \frac{3575}{64}x^8-\frac{20449}{192}x^6+\frac{425843}{6720}x^4-\frac{81233}{6720}x^2+\frac{35}{96}$$

$$P_9 := \frac{60775}{576}x^9-\frac{131131}{576}x^7+\frac{219791}{1344}x^5-\frac{2632993}{60480}x^3+\frac{95129}{30240}x$$

$$P_{10} := \frac{230945}{1152}x^{10}-\frac{347633}{720}x^8+\frac{1366079}{3360}x^6-\frac{1690403}{12096}x^4+\frac{407791}{24192}x^2-\frac{21}{64}$$

$$P_{11} := \frac{146965}{384}x^{11}-\frac{1465451}{1440}x^9+\frac{707863}{720}x^7-\frac{1675141}{4032}x^5+\frac{19095583}{266112}x^3-\frac{463865}{133056}x$$

Рисунок 1 – Вычисление многочленов Лежандра в системе Maple

Из общих свойств классических ортогональных многочленов вытекают следующие свойства многочленов Лежандра:

– система многочленов Лежандра полна на отрезке $[-1;1]$;

– система многочленов Лежандра замкнута;

- система многочленов Лежандра исчерпывает все собственные функции краевой задачи Штурма-Лиувилля;
- многочлен Лежандра $P_n(x)$ имеет ровно n простых нулей, расположенных строго внутри отрезка $[-1;1]$;
- для системы многочленов Лежандра имеет место теорема разложимости Стеклова [4].

Теорема Стеклова. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ функция $f(x)$ разложима в абсолютно и непрерывно сходящийся ряд по полиномам Лежандра

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

где

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx,\ n=0,1,2,\ldots$$

– коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Многочлены Лежандра – многочлены, которые в наименьшей степени отклоняются от нуля в смысле среднеквадратичного [2]. С их помощью легко для заданной функции $f(x)\in L_2$ построить в подпространстве $H_n(PL)$ многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения на отрезке $[-1;1]$. Если такой многочлен искать в виде

$$PL_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x), \tag{3}$$

то коэффициенты найдутся по формуле

$$c_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx,\ k=0,1,2,\ldots,n, \tag{4}$$

а наилучшее приближение (мера близости функции $f(x)$ к многочлену $PL_n(x)$) имеет вид:

$$\delta_n^2=\int_{-1}^{1} f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}c_k^2. \tag{5}$$

Рассмотрим примеры построения многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения для нескольких функций $f(x)$, заданных на отрезке $x\in[a;b]\neq[-1;1]$.

Пример 1. Найти наилучшее среднеквадратичное приближение функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[-5;2]$ среди многочленов степени не выше 2-ой, 3-ей и 4-ой, для каждого случая вычислить величину наилучшего приближения.

Сделаем замену переменного $x=\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}$, переводящую отрезок $x\in[-5;\,2]$ в отрезок $t\in[-1;1]$. Тогда $f(t)=e^{\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}}$.

По формулам (4) вычисляем коэффициенты:

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}}dt=-\frac{1}{7}e^{-5}+\frac{1}{7}e^{2},$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}te^{\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}}dt=\frac{27}{49}e^{-5}+\frac{15}{49}e^{2},$$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)e^{\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}}dt=-\frac{515}{343}e^{-5}+\frac{95}{343}e^{2},$$

$$c_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)e^{\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}}dt=\frac{1471}{343}e^{-5}+\frac{55}{343}e^{2},$$

$$c_4=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right)e^{\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}}dt=-\frac{32967}{2401}e^{-5}+\frac{207}{2401}e^{2}.$$

Тогда многочленами наилучшего приближения 2-ой, 3-ей и 4-ой степени к функции $f(t)=e^{\frac{7}{2}t-\frac{3}{2}}$ на отрезке $[-1;1]$ будут

$$PL_2(t)=\frac{3}{686}e^2+\frac{417}{686}e^{-5}+\left(\frac{15}{49}e^2+\frac{27}{49}e^{-5}\right)t+\left(\frac{285}{686}e^2-\frac{1545}{686}e^{-5}\right)t^2,$$

$$PL_3(t)=\frac{3}{686}e^2+\frac{417}{686}e^{-5}+\left(\frac{45}{686}e^2-\frac{4035}{686}e^{-5}\right)t+\left(\frac{285}{686}e^2-\frac{1545}{686}e^{-5}\right)t^2+$$
$$+\left(\frac{275}{686}e^2+\frac{7355}{686}e^{-5}\right)t^3,$$

$$PL_4(t)=\frac{705}{19208}e^2-\frac{87225}{19208}e^{-5}+\left(\frac{45}{686}e^2-\frac{4035}{686}e^{-5}\right)t+\left(\frac{885}{9604}e^2+\frac{472875}{9604}e^{-5}\right)t^2+$$
$$+\left(\frac{275}{686}e^2+\frac{7355}{686}e^{-5}\right)t^3+\left(\frac{1035}{2744}e^2-\frac{164835}{2744}e^{-5}\right)t^4.$$

Возвращаясь к исходной переменной $t=\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}$, получаем, что многочленами наилучшего приближения 2-ой, 3-ей и 4-ой степени к функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[-5;\,2]$ будут

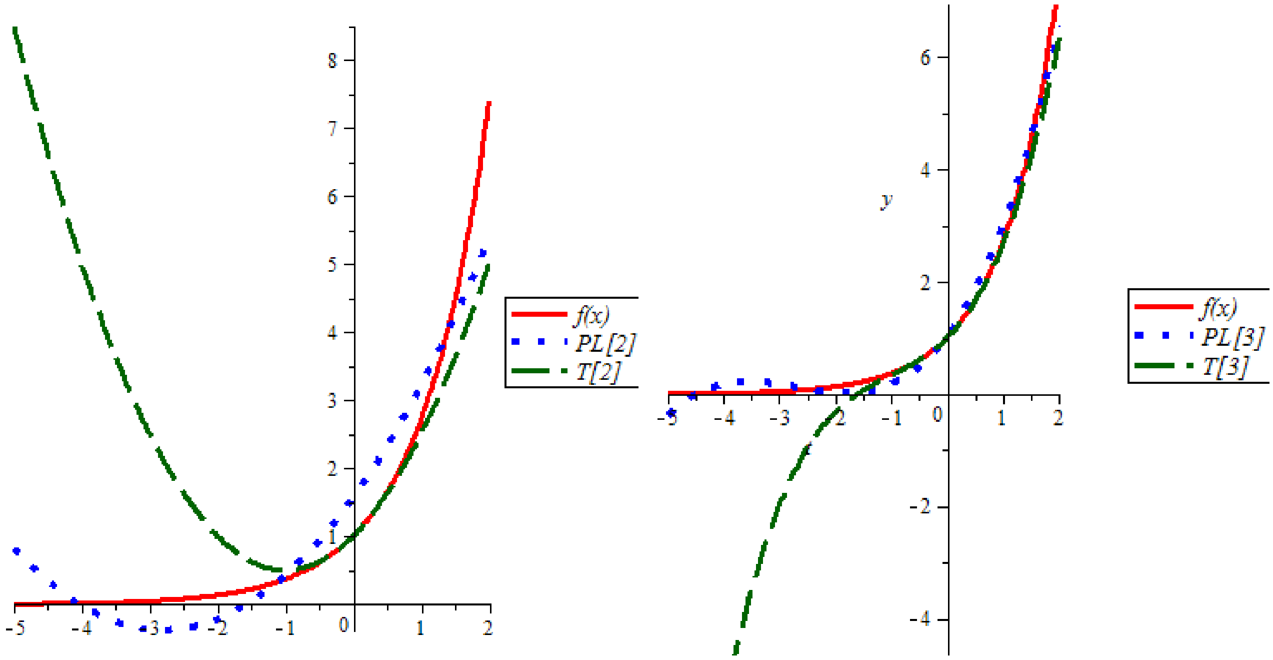
$$PL_2(x)=\frac{3561}{16807}e^2+\frac{7233}{16807}e^{-5}+\left(\frac{3180}{16807}e^2-\frac{6624}{16807}e^{-5}\right)x+\left(\frac{570}{16807}e^2-\frac{3090}{16807}e^{-5}\right)x^2$$
,
$$PL_3(x)=\frac{16512}{117649}e^2-\frac{174432}{117649}e^{-5}+\left(\frac{21600}{117649}e^2-\frac{64020}{117649}e^{-5}\right)x+$$
$$+\left(\frac{8940}{117649}e^2+\frac{110760}{117649}e^{-5}\right)x^2+\left(\frac{1100}{117649}e^2+\frac{29420}{117649}e^{-5}\right)x^3,$$

$$PL_4(x)=\frac{103785}{823543}e^2-\frac{658095}{823543}e^{-5}+\left(\frac{113940}{823543}e^2+\frac{5485920}{823543}e^{-5}\right)x+$$
$$+\left(\frac{68790}{823543}e^2-\frac{213690}{823543}e^{-5}\right)x^2+\left(\frac{20120}{823543}e^2-\frac{1772080}{823543}e^{-5}\right)x^3+$$
$$+\left(\frac{2070}{823543}e^2-\frac{329670}{823543}e^{-5}\right)x^4.$$

Далее находим величину наилучшего приближения:

$$\delta_2^2=\int_{-1}^{1}f^2(t)dt-2c_0^2-\frac{2}{3}c_1^2-\frac{2}{5}c_2^2\approx 0{,}494331813,$$
$$\delta_3^2=\int_{-1}^{1}f^2(t)dt-2c_0^2-\frac{2}{3}c_1^2-\frac{2}{5}c_2^2-\frac{2}{7}c_3^2\approx 0{,}0734340882,$$
$$\delta_4^2=\int_{-1}^{1}f^2(t)dt-2c_0^2-\frac{2}{3}c_1^2-\frac{2}{5}c_2^2-\frac{2}{7}c_3^2-\frac{2}{9}c_4^2\approx 0{,}00754351905.$$

Изобразим графики полученных функций (рис. 2,3). Для сравнения на одной плоскости с графиками $f(x)=e^x$ и $PL_n(x)$ построен график соответствующего многочлена Тейлора $T_n(x)=\sum_{k-0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.



a) $n=2$ b) $n=3$

Рисунок 2 – Графики функции $f(x)=e^x$ и её приближений многочленами Лежандра $PL_n(x)$ и Тейлора $T_n(x)$

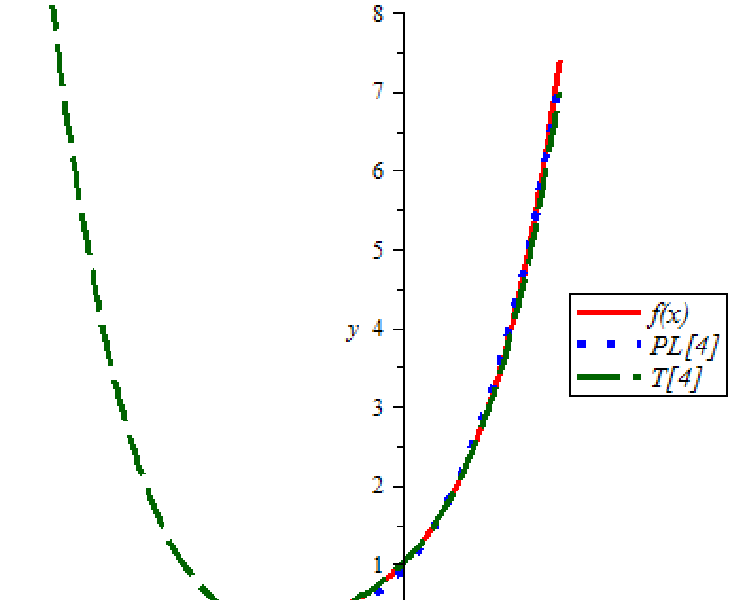


Рисунок 3 – Графики функции $f(x)=e^x$ и её приближений многочленами Лежандра $PL_4(x)$ и Тейлора $T_4(x)$

Пример 2. Найти наилучшее среднеквадратичное приближение функции $f(x)=\cos x$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ среди многочленов степени не выше 2-ой, 4-ой и 6-ой, для каждого случая вычислить величину наилучшего приближения.

Переводим отрезок $x \in [-\pi; \pi]$ в отрезок $t \in [-1; 1]$, сделав замену переменного $x = \pi t$, тогда $f(t) = \cos \pi t$.

Вычисляем коэффициенты, пользуясь формулами (4):

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(\pi t) dt = 0,$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} t\cos(\pi t) dt = 0,$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right)\cos(\pi t) dt = -\frac{15}{\pi^2},$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right)\cos(\pi t) dt = 0,$$

$$c_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{8}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right)\cos(\pi t) dt = -\frac{45\left(2\pi^2 - 21\right)}{\pi^4},$$

$$c_5 = \frac{11}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{8}\left(63t^5 - 70t^3 + 15t\right)\cos(\pi t) dt = 0,$$

$$c_6 = \frac{13}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{16}\left(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5\right)\cos(\pi t) dt = -\frac{273\left(\pi^4 - 60\pi^2 + 495\right)}{\pi^6}.$$

Находим многочлены наилучшего приближения 2-ой, 4-ой и 6-ой степени к функции $f(t) = \cos \pi t$ на отрезке $[-1; 1]$

$$PL_2(t) = -\frac{15}{2} \cdot \frac{3t^2 - 1}{\pi^2},$$

$$PL_4(t) = -\frac{105}{8} \cdot \frac{\left(30\pi^2 - 315\right)t^4 + \left(270 - 24\pi^2\right)t^2 + 2\pi^2 - 27}{\pi^4},$$

$$PL_6(t) = -\frac{63}{16\pi^6}\Big(\left(1001\pi^4 - 60060\pi^2 + 495495\right)t^6 + \left(80850\pi^2 - 1265\pi^4 - 675675\right)t^4 +$$
$$+ \left(375\pi^4 - 26400\pi^2 + 225225\right)t^2 + 1210\pi^2 - 15\pi^4 - 10725\Big).$$

Далее заменяем в полученных выражениях $t = \dfrac{x}{\pi}$ и выписываем многочлены наилучшего приближения 2-ой, 4-ой и 6-ой степени к функции $f(x) = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$:

$$PL_2(x) = \frac{15}{2} \cdot \frac{\pi^2 - 3x^2}{\pi^4},$$

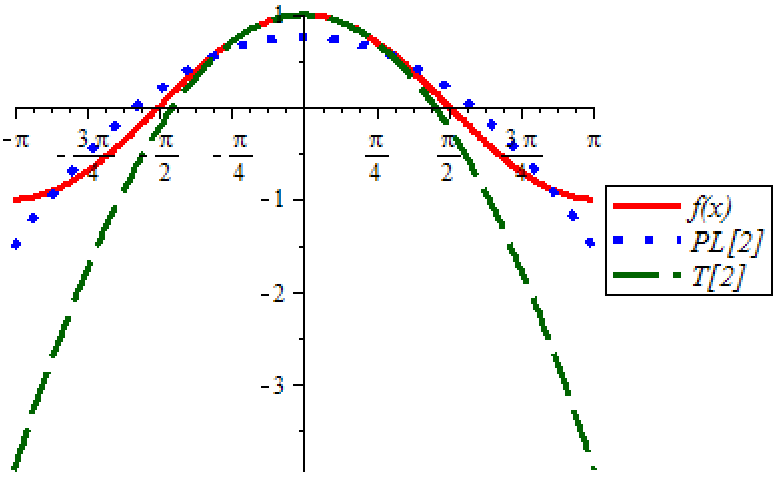
$$PL_4(x) = -\frac{105}{8} \cdot \frac{(30\pi^2 - 315)x^4 + (270\pi^2 - 24\pi^4)x^2 + 2\pi^6 - 27\pi^4}{\pi^8},$$

$$PL_6(x) = \frac{63}{16\pi^{12}}\left((60060\pi^2 - 1001\pi^4 - 495495)x^6 + (1265\pi^6 - 80850\pi^4 + 675675\pi^2)x^4 + \right.$$
$$\left. + (26400\pi^6 - 375\pi^8 - 225225\pi^4)x^2 + 15\pi^{10} - 1210\pi^8 + 10725\pi^6\right).$$

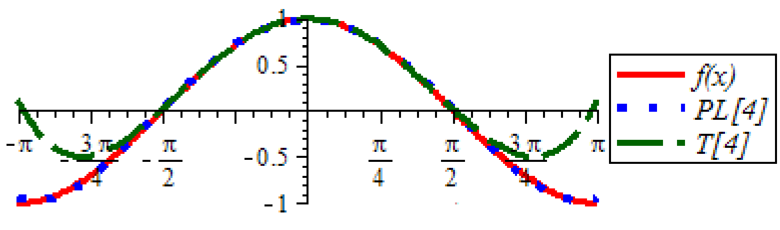
Вычисляем величину наилучшего приближения:

$$\delta_2^2 = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt - 2c_0^2 - \frac{2}{3}c_1^2 - \frac{2}{5}c_2^2 \approx 0{,}0760615975,$$
$$\delta_4^2 = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt - 2c_0^2 - \frac{2}{3}c_1^2 - \frac{2}{5}c_2^2 - \frac{2}{7}c_3^2 - \frac{2}{9}c_4^2 \approx 0{,}00067400704,$$
$$\delta_6^2 = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt - 2c_0^2 - \frac{2}{3}c_1^2 - \frac{2}{5}c_2^2 - \frac{2}{7}c_3^2 - \frac{2}{9}c_4^2 - \frac{2}{11}c_5^2 - \frac{2}{13}c_6^2 \approx 0{,}0000015264156.$$

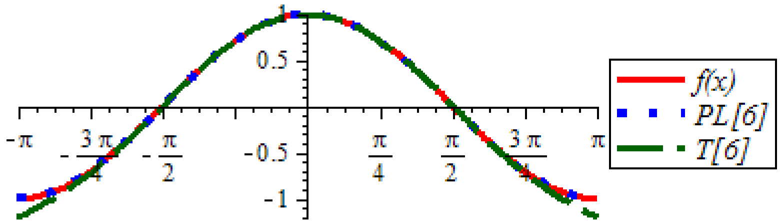
Изображаем на одной плоскости графики заданной функции $f(x) = \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$, полученных приближений $PL_n(x)$ и многочленов Тейлора $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (рис. 4).



а) $n = 2$



b) $n = 4$



c) $n=6$

Рисунок 4 – Графики функции $f(x)=\cos x$ и её приближений многочленами Лежандра $PL_n(x)$ и Тейлора $T_n(x)$

Пример 3. Найти наилучшее среднеквадратичное приближение функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0;\,2\pi]$ среди многочленов степени не выше 3-ей, 5-ой и 7-ой, для каждого случая вычислить величину наилучшего приближения.

Сделаем замену переменной $x=\pi(t+1)$, переведя тем самым отрезок $x\in[0;\,2\pi]$ в отрезок $t\in[-1;\,1]$, тогда $f(t)=\sin\pi(t+1)$.

Используя формулы (4) вычисляем коэффициенты:

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin\pi(t+1)dt=0,$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t\sin\pi(t+1)dt=-\frac{3}{\pi},$$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)\sin\pi(t+1)dt=0,$$

$$c_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)\sin\pi(t+1)dt=-\frac{7(\pi^2-15)}{\pi^3},$$

$$c_4=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right)\sin\pi(t+1)dt=0,$$

$$c_5=\frac{11}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{8}\left(63t^5-70t^3+15t\right)\sin\pi(t+1)dt=-\frac{11(\pi^4-105\pi^2+945)}{\pi^5},$$

$$c_6=\frac{13}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{16}\left(231t^6-315t^4+105t^2-5\right)\sin\pi(t+1)dt=0,$$

$$c_7=\frac{15}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{16}\left(429t^7-693t^5+315t^3-35t\right)\sin\pi(t+1)dt=$$

$$=-\frac{15\left(\pi^6-378\pi^4+17325\pi^2-135135\right)}{\pi^7}.$$

Находим многочлены наилучшего приближения 3-ей, 5-ой и 7-ой степени к функции $f(t)=\sin\pi(t+1)$ на отрезке $[-1;\,1]$

$$PL_3(t)=-\frac{5}{2}\cdot\frac{\left(7\pi^2-105\right)t^3+\left(63-3\pi^2\right)t}{\pi^3},$$

$$PL_5(t)=-\frac{21}{8\pi^5}\Big(\left(33\pi^4-3465\pi^2+31185\right)t^5+\left(3750\pi^2-30\pi^4-34650\right)t^3+$$
$$+\left(5\pi^4-765\pi^2+7425\right)t\Big),$$

$$PL_7(t)=-\frac{9}{16\pi^7}\Big(\left(715\pi^6-270270\pi^4+12387375\pi^2-96621525\right)t^7+$$
$$+\left(420420\pi^4-1001\pi^6-19864845\pi^2+156080925\right)t^5+$$
$$+\left(385\pi^6-180950\pi^4+8933925\pi^2-70945875\right)t^3+$$
$$+\left(18480\pi^4-35\pi^6-975975\pi^2+7882875\right)t\Big).$$

Возвращаясь к переменной x, заменяем в полученных функциях $t=\dfrac{x}{\pi}-1$ и выписываем многочлены наилучшего приближения 3-ей, 5-ой и 7-ой степени к функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0;\,2\pi]$:

$$PL_3(x)=\frac{5(\pi-x)}{2\pi^6}\Big(\left(7\pi^2-105\right)x^2+\left(210\pi-14\pi^3\right)x+4\pi^4-42\pi^2\Big),$$

$$PL_5(x)=\frac{21(\pi-x)}{8\pi^{10}}\Big(\left(33\pi^4-3465\pi^2+31185\right)x^4+\left(13860\pi^3-132\pi^5-124740\pi\right)x^3+$$
$$+\left(168\pi^6-17040\pi^4+152460\pi^2\right)x^2+\left(6360\pi^5-72\pi^7-55440\pi^3\right)x+$$
$$+8\pi^8-480\pi^6+3960\pi^4\Big),$$

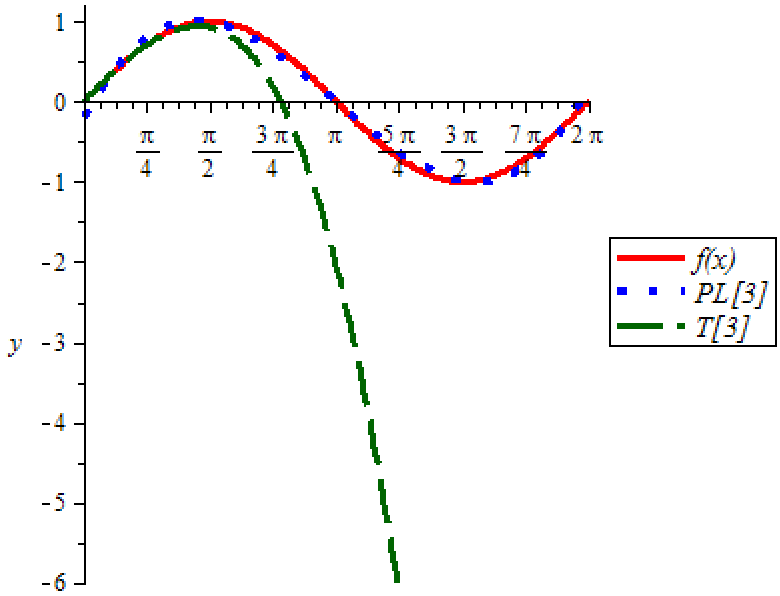
$$PL_7(x)=\frac{9(\pi-x)}{16\pi^{14}}\Big(\big(715\pi^6-270270\pi^4+12387375\pi^2-96621525\big)x^6+$$
$$+\big(1621620\pi^5-4290\pi^7-74324250\pi^3+579729150\pi\big)x^5+$$
$$+\big(9724\pi^8-3633630\pi^6+165945780\pi^4-1293241950\pi^2\big)x^4+$$
$$+\big(3723720\pi^7-10296\pi^9-168288120\pi^5+1308106800\pi^3\big)x^3+$$
$$+\big(5104\pi^{10}-1712480\pi^8+75555480\pi^6-583783200\pi^4\big)x^2+$$
$$+\big(301840\pi^9-1056\pi^{11}-12732720\pi^7+97297200\pi^5\big)x+$$
$$+64\pi^{12}-12320\pi^{10}+480480\pi^8-3606300\pi^6\Big).$$

Вычисляем величину наилучшего приближения:

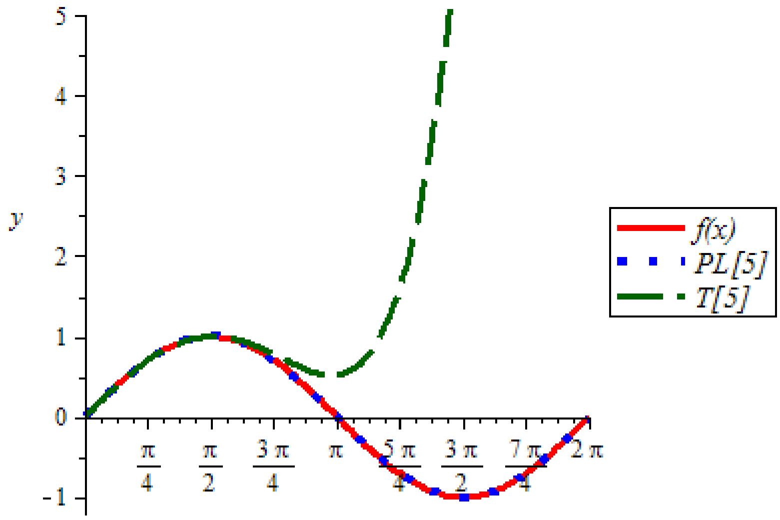
$$\delta_3^2=\int_{-1}^{1}f^2(t)dt-\frac{2}{3}c_1^2-\frac{2}{7}c_3^2\approx 0{,}0087802342\,,$$
$$\delta_5^2=\int_{-1}^{1}f^2(t)dt-\frac{2}{3}c_1^2-\frac{2}{7}c_3^2-\frac{2}{11}c_5^2\approx 0{,}000036978204\,,$$
$$\delta_7^2=\int_{-1}^{1}f^2(t)dt-\frac{2}{3}c_1^2-\frac{2}{7}c_3^2-\frac{2}{11}c_5^2-\frac{2}{15}c_7^2\approx 0{,}00000005037744\,.$$

Изображаем на одной плоскости графики заданной функции $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\,2\pi]$, полученных приближений $PL_n(x)$ и многочленов Тейлора $T_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (рис. 5).

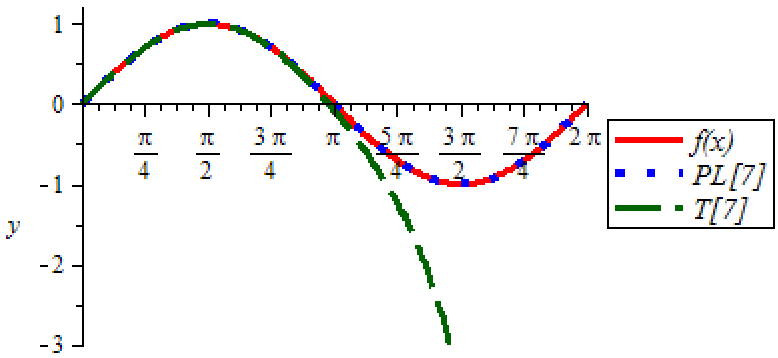
Анализируя графики полученных многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения, построенных с помощью многочленов Лежандра, можно сделать вывод, что уже многочлены $PL_2(x)$ и $PL_3(x)$ дают вполне приемлемую точность на всем заданном отрезке $[a;\,b]\neq[-1;\,1]$. Тогда как многочлены Тейлора «неплохо» описываю заданную функцию $f(x)$ лишь на отрезке $[-1;\,1]$ (т.е. в окрестности нуля).



a) $n=3$



b) $n=5$



c) $n=7$

Рисунок 5 – Графики функции $f(x)=\sin x$ и её приближений многочленами Лежандра $PL_n(x)$ и Тейлора $T_n(x)$

Именно благодаря своим свойствам многочлены Лежандра находят широкое применение в решении многих математических задач. В частности, многочлены Лежандра и связанные с ними функции встречаются при решении уравнения Лапласа, волнового уравнения или уравнения теплопроводности [1]. Эти многочлены участвуют в образовании сферических функций, в которых решаются ряд задач математической физики, дифференциальное уравнение Лежандра возникает для задачи потенциала в сфероидальных и тороидальных координатах [2].

Библиографический список

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Пер. Н.Я. Виленкина. М.: Наука, 1973. Т.1. 296 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т.1. М.: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
4. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. Т.1. Учебник. М.:Лань, 2017. 608 с.