УДК 519.6

Визуализация в системе Maple определения предела функции по Гейне

Ушакова Ирина Андреевна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
магистрант

Аннотация
В работе описывается возможное применение компьютерной визуализации при изучении студентами понятия предела функции по Гейне. Представлен программный код в системе Maple, позволяющий создавать серию изображений, на которых с приближением последовательности точек x_i к точке x_0, соответствующая последовательность точек $y_i = f(x_i)$ приближается к точке $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Ключевые слова: предел функции, компьютерная визуализация, система Maple.

Visualization in the Maple system of determining the limit of a function by Heine

Ushakova Irina Andreevna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
postgraduate

Abstract
The paper describes the possible use of computer visualization when students study the concept of the limit of a function according to Heine. The program code in the Maple system is presented, allowing to create a series of images, on which, with the approach of a sequence of points x_i to a point x_0, the corresponding sequence of points $y_i = f(x_i)$ approaches the point $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Keywords: function limit, computer visualization, Maple system.

Понятие предела является одним из важнейших понятий математического анализа [3]. Такие определения как: непрерывная функция $f(x)$ в точке x_0, производная функции $f'(x)$, определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ формулируются через пределы специально составленных функций [1,3,6]. Поэтому для успешного освоения всего курса математического анализа первокурсникам необходимо прочно усвоить понятие предела функции. Однако многие студенты ввиду высокого уровня абстракции этого понятия испытывают значительные затруднения при его изучении. Помочь, хотя бы частично, в преодолении трудностей при изучении понятия предела функции, на наш взгляд, может компьютерная визуализация этого понятия.

Используя графические возможности системы Maple, нами была написана программа, визуализирующая определение предела функции по Гейне (рис.1) [2]. В программе вначале создается графический объект g – график функции $f(x)=x^2$ на промежутке $x\in[-1,\,2]$. Далее задается последовательность точек $x_i=1-\dfrac{1}{2^{i-1}}$, $i=1,2,\ldots,N_1$, сходящаяся к точке $x_0=1$, т.е. $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=1$. Для полученных точек x_i и $y_i=f(x_i)$ формируются графические объекты:

- l_i – две пунктирные линии, задающие проекции на координатные оси точек (x_i,y_i) графика заданной функции $f(x)$;
- t_i – текстовые надписи 'x_i' и 'y_i';
- p_i – две окружности с центрами в точках $(x_i,0)$ и $(0,y_i)$ радиуса 0,035, отмечающие на соответствующих координатных осях точки последовательностей x_i и y_i.

В последнем цикле, с помощью функции seq, формируются последовательности из созданных графических объектов: линий $lk_i=\{l_1,l_2,\ldots,l_i\}$, текстовых надписей $tk_i=\{t_1,t_2,\ldots,t_i\}$ и окружностей $pk_i=\{p_1,p_2,\ldots,p_i\}$, $i=1,2,\ldots,N_1$. Константы N и N_1 задают количество элементов последовательностей x_i и y_i.

```
> restart : with(plots) : with(plottools) :
> f := x^2 : N := 6 : N1 := 10 :
> g := plot(f, x=-1..2, y=0..2, linestyle=1, thickness=3, color=blue, scaling=constrained, axis[1]
     = [gridlines = [30, color=grey, majorlines = 10]], axis[2] = [gridlines = [20, color=grey, majorlines
     = 10]], tickmarks = [[-1, 0, 1, 2], [0, 1, 2]]) :
> for i from 1 to N1 do
     x[i] := 1 - 1/2^(i-1) : y[i] := subs(x=x[i], f) :
     l[i] := line([x[i], 0], [x[i], y[i]], linestyle=3, thickness=1, color="DarkSlateGray"), line([0, y[i]],
      [x[i], y[i]], linestyle=3, thickness=1, color="DarkSlateGray") :
     t[i] := textplot([x[i] + 0.06, 0.1, x,'font'= ["times", "roman", "bold", 12]],'color'= "Red"), textplot([x[i]
      + 0.12, 0.06, i,'font'= ["times", "roman", "bold", 8]],'color'= "Red"), textplot([-0.13, y[i] + 0.05, y,'font
     '= ["times", "roman", "bold", 12]],'color'= "Red"), textplot([-0.08, y[i], i,'font'= ["times", "roman",
     "bold", 8]],'color'= "Red") :
     p[i] := circle([x[i], 0], 0.035, color=red), circle([0, y[i]], 0.035, color=red) od:
  for k from 1 to N1 do
     lk[k] := seq(l[i], i=1..k) :
     tk[k] := seq(t[i], i=1..k) : pk[k] := seq(p[i], i=1..k) od:
```

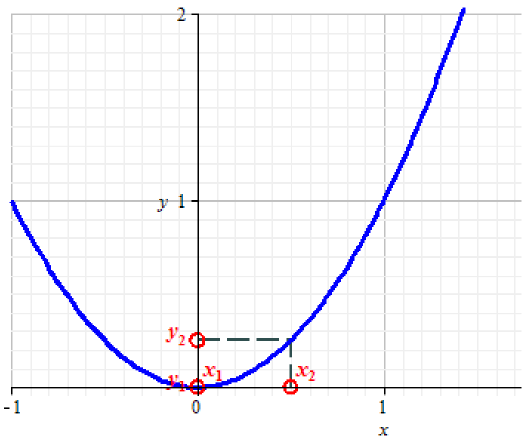
Рисунок 1 – Компьютерный код программы в Maple, создающей графические объекты для визуализации определения предела функции $\lim\limits_{x\to1}x^2=1$ по Гейне

Далее, вновь используя стандартную конструкцию цикла for, с помощью команды display (рис. 2) на экран выводится последовательность изображений, на каждом из которых вместе с графиком функции $f(x) = x^2$ на координатных осях изображаются точки последовательностей x_i и y_i. (рис. 3).

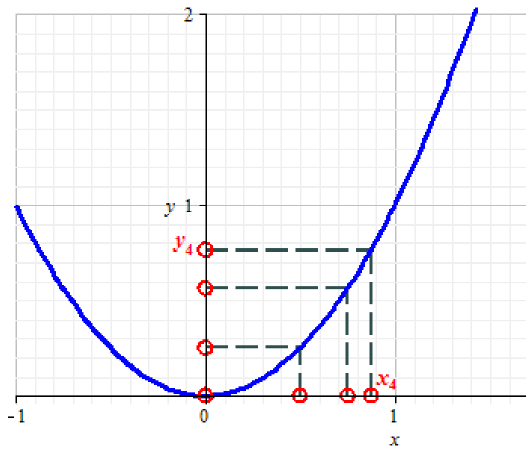
> **for** j **from** 1 **to** N **do** $display(lk[j], g, tk[j], pk[j], scaling = constrained)$ **od**

Рисунок 2 – Цикл, формирующий серию изображений

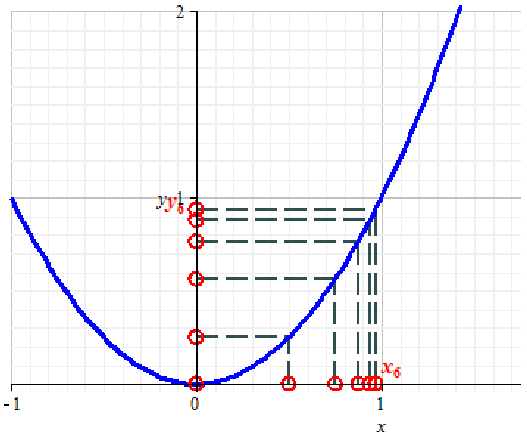
Каждая следующая картинка наглядно демонстрирует тот факт, что с увеличением числа N на оси абсцисс точки последовательности $x_i = 1 - \frac{1}{2^{i-1}}$ «скапливаются» у точки $x_0 = 1$, а на оси координат последовательность точек $y_i = f(x_i)$ неограниченно приближается к точке $a = 1$, являющейся пределом функции $f(x) = x^2$ при $x \to 1$, т.е. $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.



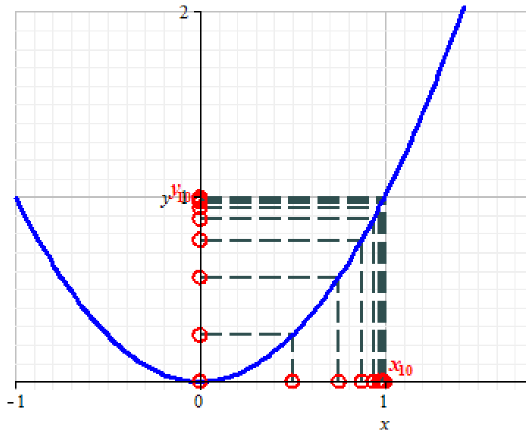
a) $i = 2$



b) $i = 4$



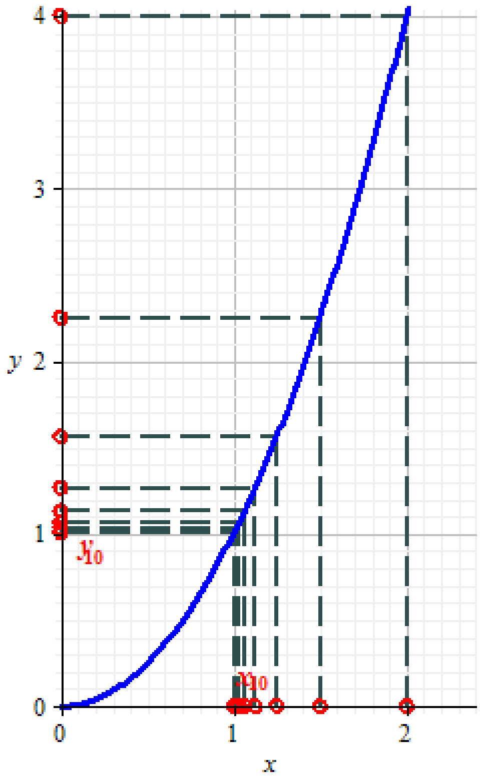
c) $i = 6$



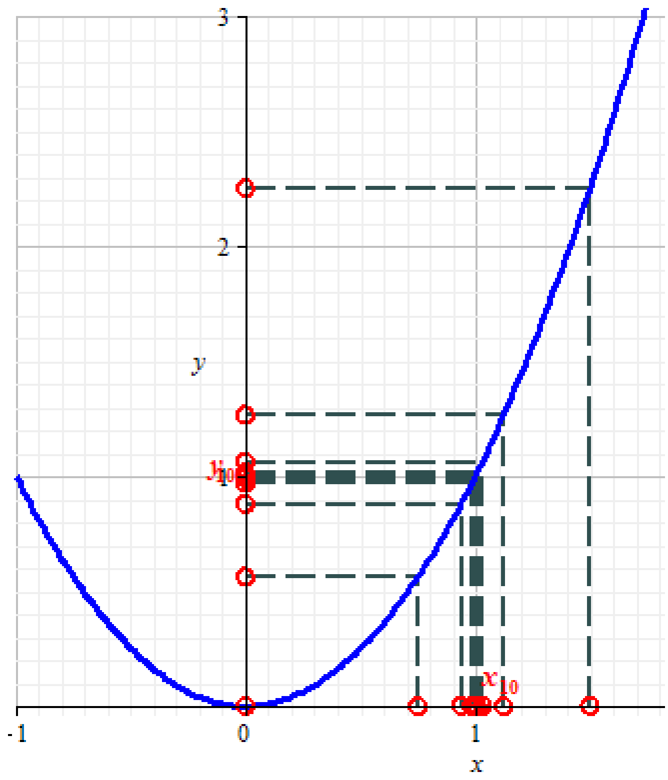
d) $i = 10$

Рисунок 3 – Серия рисунков, с последовательно увеличивающимся числом элементов последовательностей $x_i = 1 - \frac{1}{2^{i-1}}$ и $y_i = (x_i)^2$

Полученную программу можно также использовать, для объяснения такого «тонкого» понятия как односторонние пределы функции. Так, при выборе последовательности $x_i = 1 - \frac{1}{2^{i-1}} \to 1$ при $i \to \infty$, демонстрируется левосторонний предел $\lim\limits_{x \to 1-0} x^2 = 1$. А взяв в качестве последовательности $x_i = 1 + \frac{1}{2^{i-1}}$, также сходящуюся к точке $x_0 = 1$, получаем последовательности изображений, демонстрирующих правосторонний предел функции $\lim\limits_{x \to 1+0} x^2 = 1$ (рис. 4,a). Изменив последовательность на $x_i = 1 + \frac{(-1)^i}{2^{i-1}}$, сходящуюся с двух сторон к точке $x_0 = 1$ при $i \to \infty$, демонстрируем критерий существования предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (рис. 4,b).



a) $x_i = 1 + \frac{1}{2^{i-1}}$



b) $x_i = 1 + \frac{(-1)^i}{2^{i-1}}$

Рисунок 4 – Визуализация определения предела функции $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ при выборе различных последовательностей $x_i \to 1$ при $i \to \infty$

Использование подобной компьютерной визуализации успешно применяется нами при изучении понятия предел последовательности [4,5]. На наш взгляд, компьютерная визуализация абстрактных понятий, представляющая их в виде, удобном для восприятия, позволяет студентам лучше усвоить довольно тонкие и сложные вопросы, помогает избежать формализма знаний.

Библиографический список

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1988. 432 с.
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М.:СОЛОН-Пресс, 2006. 720 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учеб. для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. 736 с.
4. Ушакова И.А., Эйрих Н.В. Об использовании динамических компьютерных визуализаций при изучении темы «Предел последовательности» // Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: сб. науч. тр. научно-практ. конф. (18 февраля 2017 г., г. Тверь). в 2 ч. Ч.2 Тверь: Твер. гос. ун-т, 2017. С. 130 – 133.
5. Ушакова И.А. Предел последовательности: визуализация в системе Maple // Сб. трудов XIV-ой Межд. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов Интеллектуальные информационные технологии, энергетика и экономика (интеллектуальные информационные системы, математическое моделирование технологических и бизнес-процессов, анализ и моделирование в электроэнергетике). В 3 т. Т.1. Смоленск. 2017. С. 58–60.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. Т.1. Учебник. М.:Лань, 2017. 608 с.