УДК 519.6

Предел функции: анимация в системе Maple

Ушакова Ирина Андреевна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
магистрант

Аннотация
Описывается процедура, создающая анимационный ролик, демонстрирующий определение предела функции. Приведены примеры созданных анимационных роликов для различных пределов различных функций.
Ключевые слова: предел функции, анимация, система Maple.

The limit of the function: animation in the Maple system

Ushakova Irina Andreevna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
postgraduate

Abstract
A procedure is described that creates an animated movie that demonstrates the definition of the function limit. Examples of created animation clips for different limits of various functions are given.
Keywords: function limit, animation, Maple system.

Изучая курс математического анализа, студенты знакомятся с двумя эквивалентными определениями предела функции. Первое определение в терминах пределов последовательности (или определение предела функции по Гейне): точка a называется пределом функции $f(x)$, $x \in X$ в точке x_0, если для любой последовательности точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющей своим пределом точку x_0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции f в точках x_n имеет своим пределом точку a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Во втором определении предела функции используется понятие окрестности (определение предела функции по Коши)»: точку a называют *пределом функции* $f(x)$, $x \in X$ при $x \to x_0$, если для любой ε-окрестности $U(a,\varepsilon)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $f(X \cap U(x_0)) \subset U(a,\varepsilon)$ [1,3,4]. В символической записи с помощью логических символов эти два определения выглядят следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_n \in X, n = 1, 2, \ldots : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

и

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon):\left|f(x)-a\right|<\varepsilon, \forall x: 0<\left|x-x_0\right|<\delta.$$

Для наглядного представления определений предела функции были использованы анимационные возможности системы Maple [2]. Созданные нами анимационные ролики визуализируют различные пределы функций: они демонстрируют неограниченное приближение последовательности $\{f(x_n)\}$ значений функции f в точках x_n к точке a, при одновременном сгущении последовательности точек $x_n \in X$, $n=1,2,\ldots$возле точки x_0.

Процедура LimitFun, визуализирует предел $\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$ (рис. 1). Обращение к данной процедуре происходит по следующим параметрам: точка x_0, к которой стремится x, и приращение аргумента Δx, задающее начальное положение точек на оси абсцисс.

```
> restart : with(plots, animate, display) : with(plottools) : with(plots) :#Подключение пакетов
> # Процедура создания анимации, демонстрирующая пределы для функции y=x^2 :
  x0 – точка к которой стремится x, Δx – приращение аргумента :
> LimitFun := proc(x0, Δx) local f, g1, g2, g3, g4, g5, Pon, Pon1, Vec, P, M, N, V1, V2, k, t1 :
  Pon := proc(x, y) plots[pointplot]([[x, y]], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 15) end proc:
  Pon1 := proc(x, y) plots[pointplot]([[x, y]], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 18) end
     proc:
  Vec := proc(x1, y1, x2, y2) plots[arrow]([x1, y1], [x2, y2], shape = arrow, width = 0.01, color = gray) end
     proc:
  k := 60 :
  f := x→x^2 :
  g1 := plot(f(x), x = -abs(x0) - abs(Δx) ..2· abs(x0) + abs(Δx), y = -1 ..5, linestyle = 1, thickness = 3, color
     = blue, scaling = constrained, discont = true, axis[1] = [gridlines = [8, color = grey]], axis[2]
     = [gridlines = [10, color = grey]]) :
  P := animate(Pon, [x0 + (10 - i)·Δx/10, f(x0 + (10 - i)·Δx/10)], i = 0 ..10, scaling = constrained, frames
     = k) :
  M := animate(Pon1, [x0 + (10 - i)·Δx/10, 0], i = 0 ..10, scaling = constrained, frames = k) :
  N := animate(Pon1, [0, f(x0 + (10 - i)·Δx/10)], i = 0 ..10, scaling = constrained, frames = k) :
  V1 := animate(Vec, [x0 + (10 - i)·Δx/10, f(x0 + (10 - i)·Δx/10), -(10 - i)·Δx/10 - abs(Δx), 0], i = 0
     ..10, frames = k) :
  V2 := animate(Vec, [x0 + (10 - i)·Δx/10, f(x0 + (10 - i)·Δx/10), 0, -f((10 - i)·Δx/10 + abs(Δx))], i
     = 0 ..10, frames = k) :
  t1 := textplot([x0 + 0.15, 0.18, x,'font'= ["times", "roman", "bold", 13]],'color'= "Red"), textplot([x0
     + 0.25, 0.1, 0,'font'= ["times", "roman", "bold", 8]],'color'= "Red"), textplot([0.15, f(x0), a,'font'
     = ["times", "roman", "bold", 13]],'color'= "Red"), circle([x0, 0], 0.035, color = red), circle([0, f(x0)],
     0.035, color = red) :
  plots[display]([g1, P, M, N, V1, V2, t1]) :
  end proc:
```

Рисунок 1 – Процедура LimitFun, создающая анимационный ролик, демонстрирующий предел $\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$

После обращения к процедуре LimitFun(1,1), система создает анимационный ролик, который демонстрирует движение точки по оси абсцисс от точки $x = 2$ до точки $x_0 = 1$, одновременно при этом движется точка по оси ординат от $y = 4$ до $a = 1$ (рис. 2). Так как $\Delta x = 1 > 0$, то визуализируется правосторонний предел функции. Изменив значение $\Delta x = -1 < 0$, после команды LimitFun(1,-1), программа создает анимацию левостороннего предела (рис. 3).

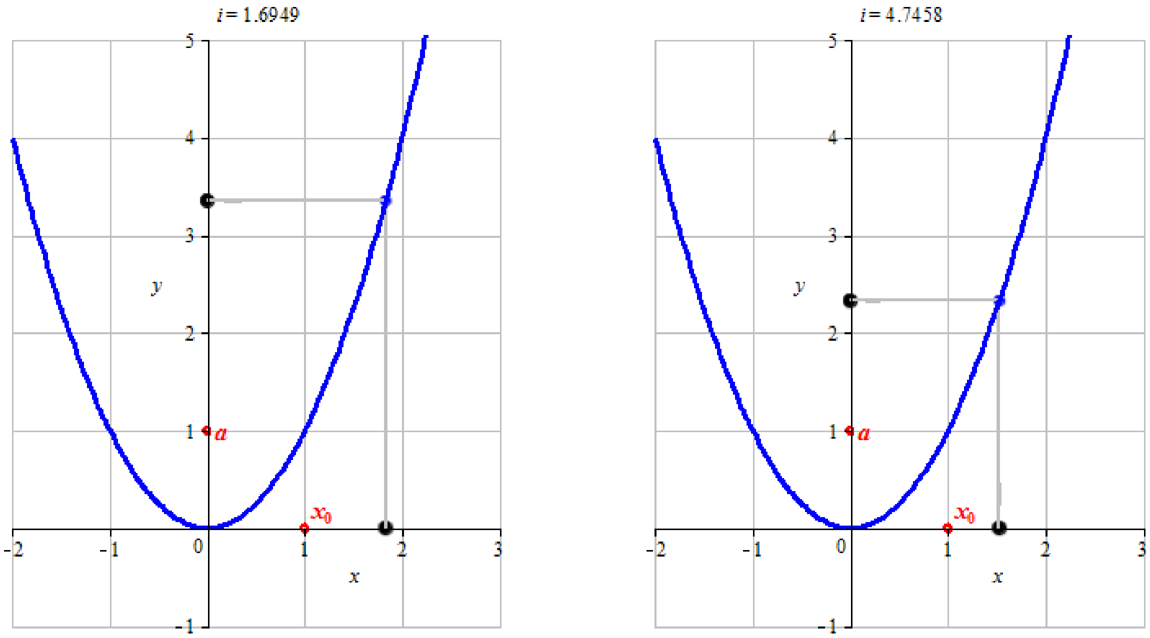

Рисунок 2 – Кадры анимации правостороннего предела $\lim\limits_{x \to 1+0} x^2 = 1$

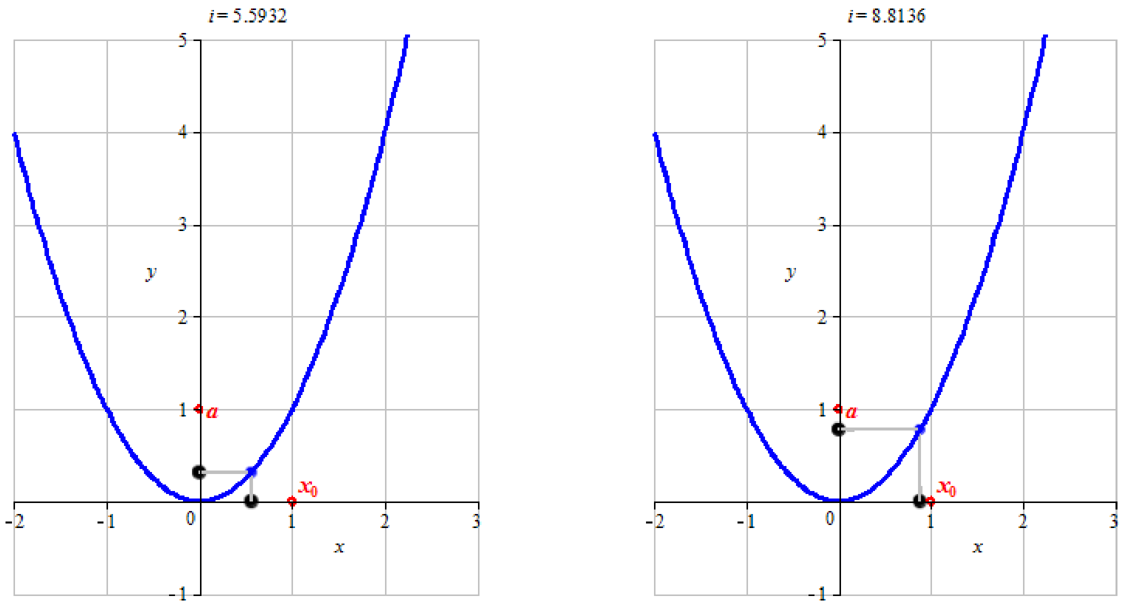

Рисунок 3 – Кадры анимации левостороннего предела $\lim\limits_{x \to 1-0} x^2 = 1$

Внося необходимые корректировки в представленную на рисунке 1 процедуру, можно получать анимации для других пределов различных функций, в том числе и для бесконечных пределов. Так нами были получены анимационные ролики для пределов функций $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 4,5) и $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 6).

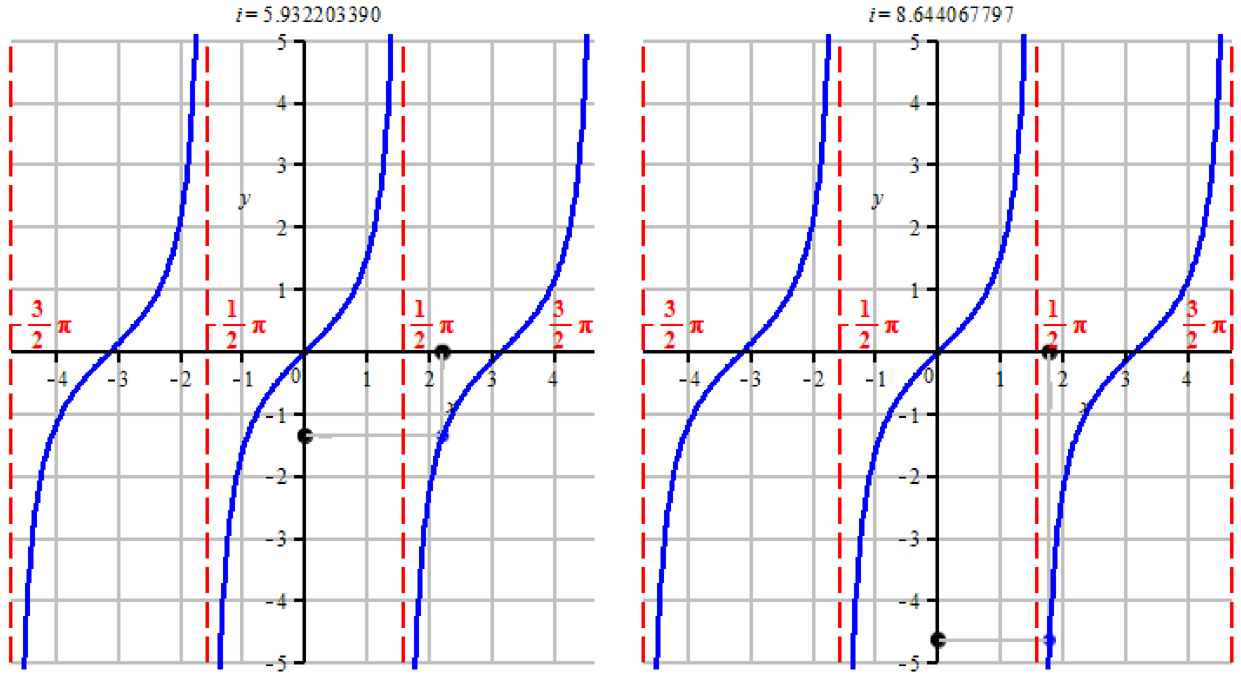

Рисунок 4 – Кадры анимации правостороннего предела $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$

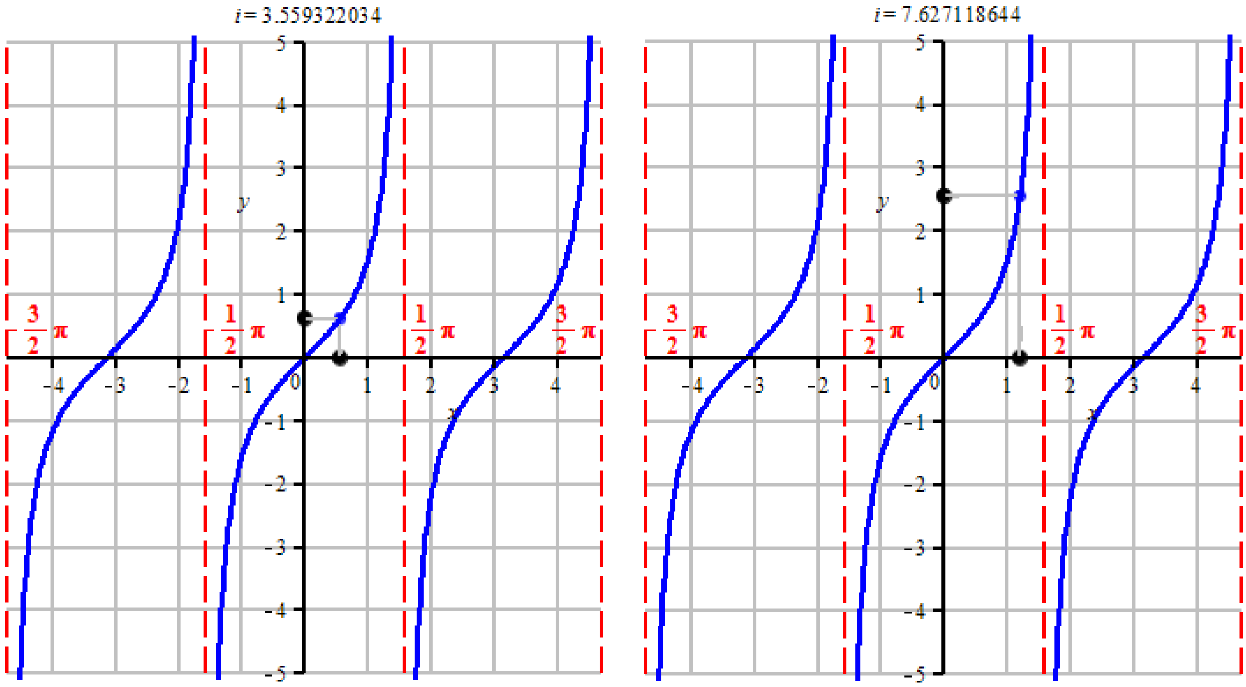

Рисунок 5 – Кадры анимации левостороннего предела $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$

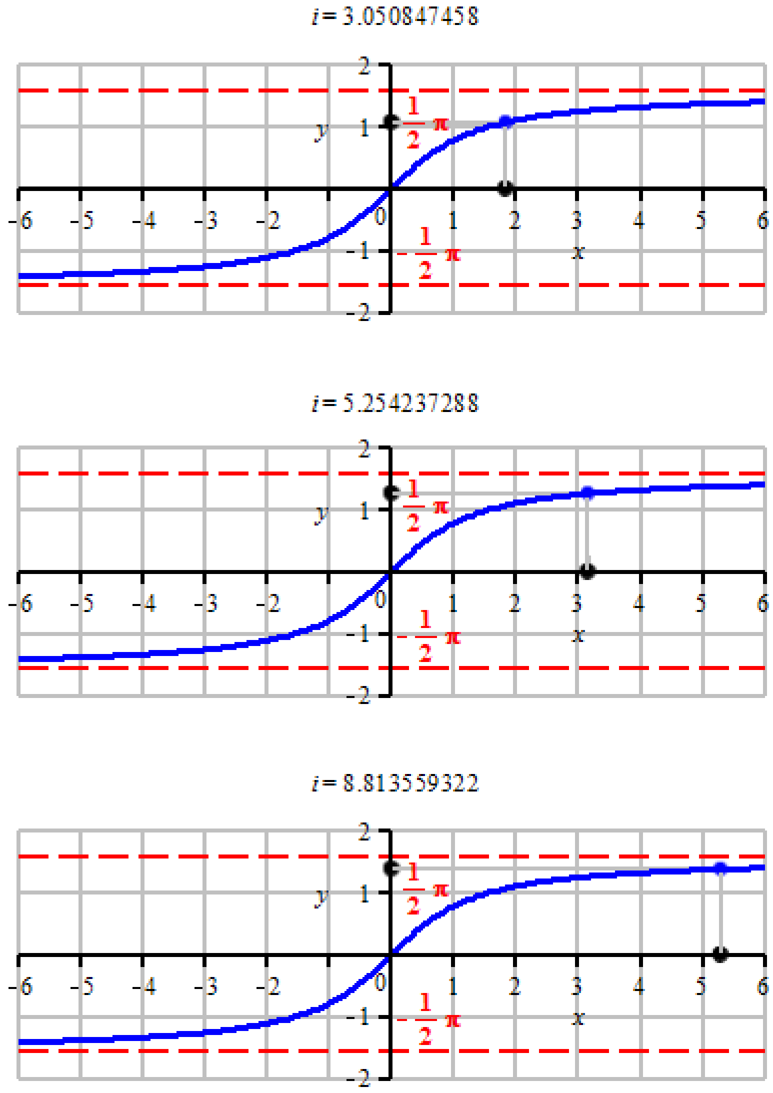

Рисунок 6 – Кадры анимации предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$

Описанная процедура была опробована для многих других пределов функций. Также и тот факт, что предел функции $f(x) = \sin x$ при $x \to +\infty$ не существует с успехом демонстрируется с помощью такого анимационного ролика.

Библиографический список

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1988. 432 с.
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М.:СОЛОН-Пресс, 2006. 720 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учеб. для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. 736 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. Т.1. Учебник. М.:Лань, 2017. 608 с.