

Вывод зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей

Воропай Руслан Александрович

НИУ «МЭИ»

Студент

Аннотация

Статически определимая балочная ферма загружается по верхнему или нижнему поясу. Для вывода искомой формулы применяется метод индукции и операторы системы Maple, позволяющие составлять и решать рекуррентные уравнения. Усилия в стержнях находятся в символьной форме методом вырезания узлов. Перемещение находится по формуле Максвелла - Мора в предположении, что все стержни имеют одинаковую жесткость.

Ключевые слова: ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

The derivation of the dependence of the deflection of a flat truss with trussed lattice on the number of panels

Voropay Ruslan Alexandrovich

NRU «MPEI»

Student

Abstract

Statically defined beam truss is loaded on the upper or lower belt. To derive the desired formula, we use the induction method and the operators of the Maple system, which allow us to compose and solve recurrent equations. Forces in the rods are obtained in the symbolic form by cutting out the knots. Deflection is found according to the Maxwell-Mora formula under the assumption that all rods have the same rigidity.

Keywords: truss, Maxwell's formula - Mora, deflection, induction, Maple

Долгое время расчет прогиба ферм производился либо вручную, там, где достаточно просто можно было использовать метод вырезания узлов или метод сечений Риттера, либо численно с применением стандартных (зачастую дорогих) систем проектирования и расчета. С появлением систем компьютерной математики и метода индукции, развитой профессором Кирсановым М.Н. и его учениками применительно к плоским [1-11] и пространственным [12-14] фермам, появилась больше возможностей для вывода точных формул зависимостей прогиба от размера конструкции и числа панелей.

Рассмотрим плоскую симметричную ферму с двумя опорами (рис. 1). Ферма статически определима. В ферме с n панелями в половине пролета число стержней – $n_s = 16n + 4$, включая три опорные стержня, число шарниров – $m = 8n + 2$.

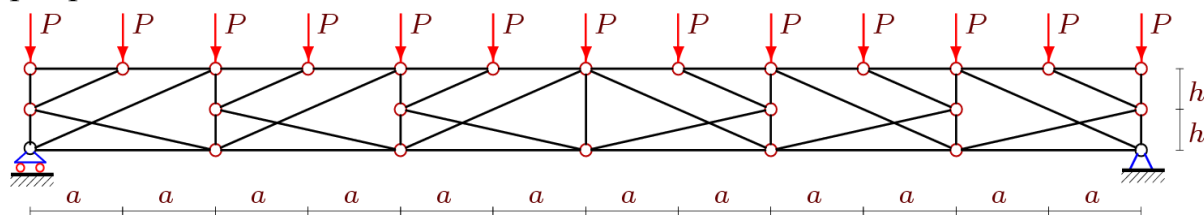


Рисунок 1 — Ферма при нагрузке сверху $n=3$

Расчет прогиба начинается с определения усилий в стержнях. Пользуясь опытом [1-4,8] и программой [15], составляем систему уравнений равновесия узлов всей фермы в целом. Сначала вводятся координаты узлов (слева направо, нижний пояс, средний и верхний). Фрагмент программы ввода координат на языке системы Maple имеет вид

```
> for i to 2*n+1 do
    x[i]:=2*a*i-2*a: y[i]:=0:
end:
> for i to n do
    x[i+2*n+1]:=2*a*i-2*a: y[i+2*n+1]:=h:
    x[i+3*n+1]:=2*a*i+2*n*a: y[i+3*n+1]:=h:
end:
> for i to 4*n+1 do
    x[i+4*n+1]:=a*i-a:
    y[i+4*n+1]:=2*h:
end:
```

Структура соединений узлов и стержней (номер узла в начале стержня и номер в конце) для шпренгельной фермы сложнее, чем в простых фермах, аналогична описанию плоского графа и имеет вид

```
> for i to 2*n do N[i]:=[i,i+1]; od:
> for i to 4*n do N[i+2*n]:=[i+4*n+1,i+4*n+2]; od:
> for i to n do
    N[i+6*n]:=[i+1,i+2*n+1];
    N[i+7*n]:=[i+n,i+3*n+1];
    N[i+8*n]:=[2*i+4*n+1,i+2*n+1];
    N[i+9*n]:=[2*i+6*n+1,i+3*n+1];
    N[i+10*n]:=[i,i+2*n+1];
    N[i+11*n]:=[i+n+1,i+3*n+1];
    N[i+12*n]:=[2*i+4*n,i+2*n+1];
    N[i+13*n]:=[2*i+6*n+2,i+3*n+1];
    N[i+14*n+1]:=[i,2*i+4*n+2];
    N[i+15*n+1]:=[i+n+1,2*i+6*n];
> od:
```

Средняя стойка вводится отдельно
 > $\mathbf{N}[14*n+1] := [n+1, 6*n+2] :$

Коэффициенты системы уравнений равновесия узлов (направляющие косинусы усилий) определяются по координатам узлов и структуре. Для расчета прогиба используется формула Максвелла – Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь обозначено: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса, EF — жесткость стержней. Индукция по десяти фермам для нагрузки сверху (рис. 1) показала, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$\tilde{\Delta} = (a^3 A_n + h^3 H_n + c^3 C_n) / (2h^2), \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad (1)$$

а для коэффициентов получается следующая закономерность

$$A_n = n(10n^3 - n - 9) / 3, \quad H_n = 4n^2 - 11n + 3, \quad C_n = 4n(n - 1).$$

Аналогично, для нагрузки снизу (рис. 2) применительно к формуле (1) получаем коэффициенты

$$A_n = n^2(5n^2 + 1) / 3, \quad H_n = 2n^2 + 2, \quad C_n = 2n^2.$$

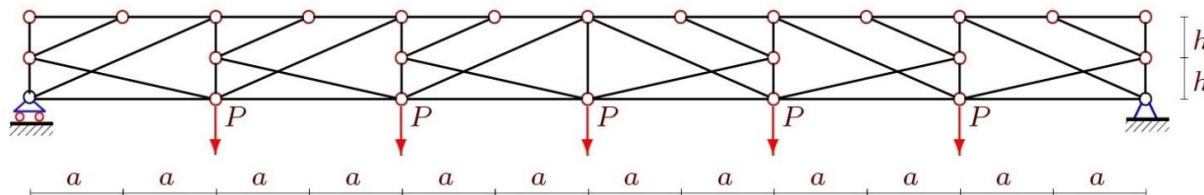


Рисунок 2 — Ферма при нагрузке снизу $n=3$

Если нагрузкой является сосредоточенная сила в середине нижнего пояса (рис. 3), то формула Максвелла - Мора упрощается

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{n_s-3} (S_i^{(1)})^2 l_i / (EF), \text{ а коэффициенты в (1) имеют вид}$$

$$A_n = 2n(2n^2 + 1) / 3, \quad H_n = 2n + 2, \quad C_n = 2n.$$

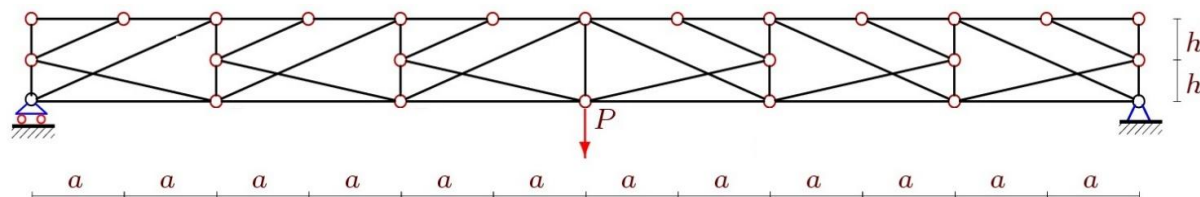


Рисунок 3 — Ферма при нагрузке снизу посередине $n=3$

На рисунке 4 показаны две кривые для прогиба при нагружении верхнего пояса (кривая 1, красная) и нижнего пояса (кривая 2, синяя). Интересно отметить точку пересечения кривых при нереально малом числе панелей. Кривые построены для относительного прогиба $\tilde{\Delta} = \Delta EF / (PL)$ при длине пролета $L=50$ м и высоте $h=4$ м.

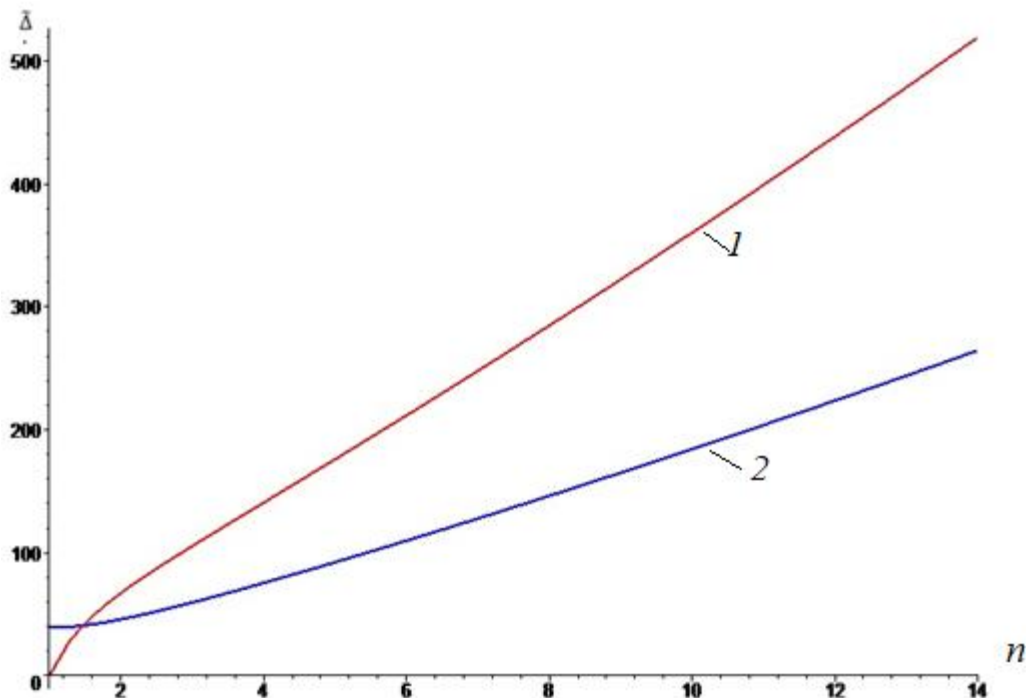


Рисунок 4 — Зависимость прогиба от числа панелей для двух случаев нагружения

Зависимость безразмерного прогиба $\tilde{\Delta} = \Delta EF / (PL)$ от числа панелей для случая нагружения фермы сосредоточенной силой в середине нижнего пояса представлена на рисунке 5. Размеры указаны в метрах, $L=35$ м.

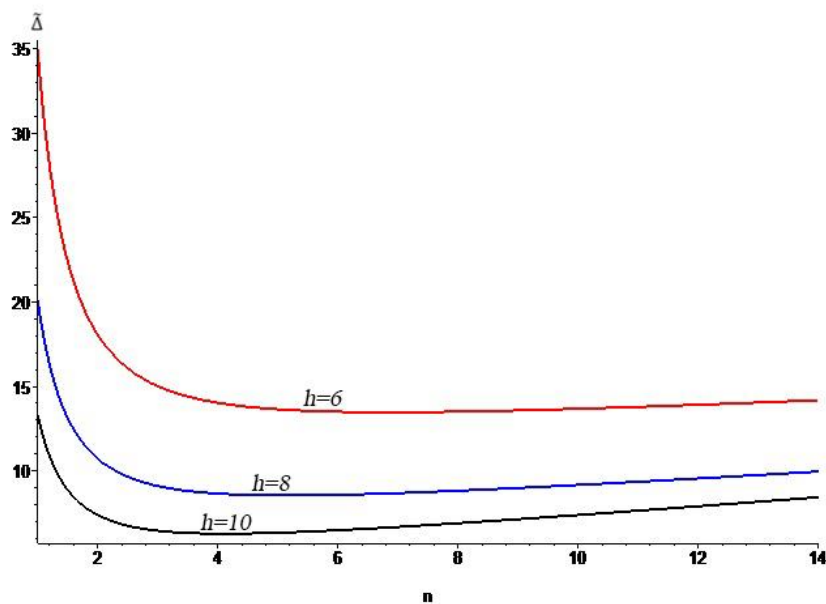


Рисунок 5 — Сосредоточенная сила (рис. 3)

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. №2(70). С. 17–22.
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4 (874). С. 20–23.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3 (873). С. 26–29
4. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27–30.
5. Зименков Н.А. Формула для прогиба шпренгельной фермы с крестообразной решеткой // Молодежь и наука. 2017. №4.
6. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. №. 3. С. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
7. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15–17.
8. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4–10.
9. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14–17.
10. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
11. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
12. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52–58.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 2–6.
14. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43. doi: 10.5862/MCE.49.4
15. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.