

Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами

Осадченко Николай Владимирович
НИУ "МЭИ"
Доцент

Аннотация

Ферма с ромбической решёткой имеет две подвижные и одну неподвижную шарнирную опору. Нагрузка приложена к нижнему поясу фермы. Для вывода зависимости прогиба от числа панелей применяются метод индукции и система компьютерной математики Maple; при этом для нахождения коэффициентов искомой формулы составляются и решаются рекуррентные уравнения. Прогиб в одном из пролётов находится с помощью интеграла Мора. Обнаружена кинематическая изменяемость фермы при чётном числе панелей, и для данного случая приведена соответствующая схема возможных скоростей. Дан обзор работ по расчёту ферм, допускающих кинематическую изменяемость.

Ключевые слова: ферма, интеграл Мора, прогиб, кинематическая изменяемость, индукция, Maple

Calculation of the deflection of a flat, statically determinate continuous truss with two spans

Osadchenko Nikolaj Vladimirovich
NRU "MPEI"
Associate professor

Abstract

The rhombic lattice truss has two movable and one fixed hinge support. The load on the lower belt is considered. To derive the dependence of the deflection on the number of panels, the method of induction and the system of symbolic mathematics Maple are used. For the coefficients of the required formula, recurrent equations are constructed and solved. The value of deflection is found with the help of Mohr's integral. The kinematic variability of the truss is found with an even number of panels; the corresponding scheme of possible velocities is given. A review of papers containing calculations of trusses that admit kinematic variability is also given.

Keywords: truss, Mohr's integral, deflection, kinematic variability, induction, Maple

Двухпролётные неразрезные фермы, в которых дополнительная промежуточная опора добавлена к обычной балочной ферме (например, с

треугольной или стандартной прямоугольной решёткой), как правило, являются статически неопределимыми. Исследуемая здесь ферма с n панелями в половине пролёта (рис.1) является исключением: она статически определима.

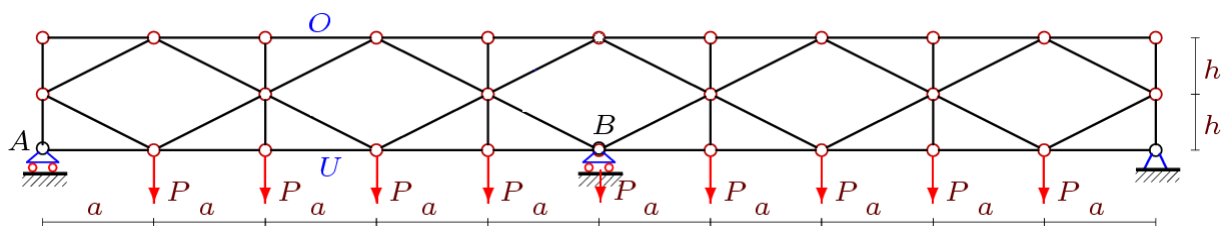


Рисунок 1 — Двухпролётная ферма при $n = 5$

Действительно, в данной ферме общее число стержней (включая четыре стержня, моделирующие опоры) таково: $n_s = 10n + 6$. Число внутренних шарниров: $m = 5n + 3$. Число стержней вдвое больше числа узлов.

На первый взгляд, кажется, что задача определения усилий в стержнях решается, так как известных в строительной механике признаков “неправильного” соединения стержней здесь не видно. Нет дисков, соединённых параллельными стержнями или стержнями, линии которых пересекаются. Не выполнено и условие кинематической неизменяемости решётчатых ферм и аналогичных шарнирно-стержневых систем, сформулированное И.М.Рабиновичем в монографии [1] (с. 213) со ссылкой на более раннюю работу Г.Мюллер-Бреслау [2]. Однако (как и для семейства исследованных в статье [3] однопролётных ферм) фермы такого типа всё-таки имеют особенность, проявляющуюся в вырождении системы уравнений равновесия при определённом числе панелей независимо от размеров. Именно, как показал расчёт ряда ферм, система уравнений равновесия вырождается при чётном числе панелей: определитель системы становится равным нулю. Подтверждение этому является схема возможных скоростей узлов, построенная для примера при $n = 2$ (рис. 2).

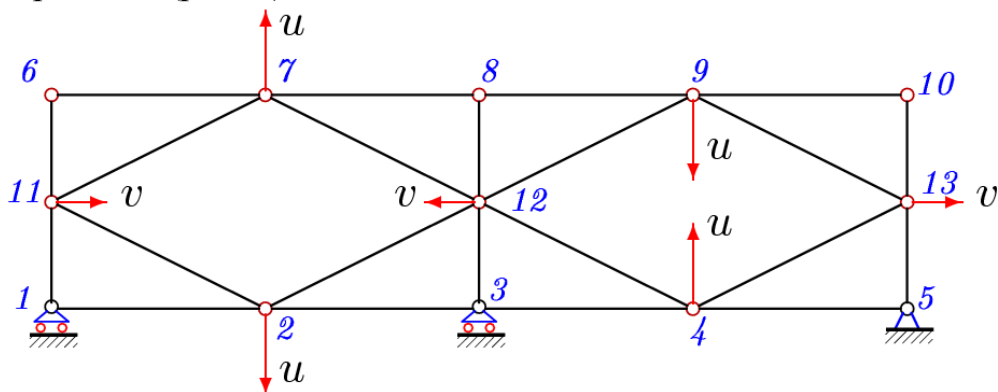


Рисунок 2 — Схема возможных скоростей узлов для фермы при $n = 2$

В работе [4] при исследовании однопролётных ферм с двойной решёткой эффект возникновения кинематической изменяемости у регулярных ферм при определённом числе панелей также был замечен и проанализирован (здесь вырождение наступало при числе панелей, кратном трём). В статье [5] мгновенная кинематическая изменяемость была выявлена и в однократно *статически неопределимой* решётке (рис. 3), для которой числа панелей по вертикали и горизонтали не являлись взаимно простыми.

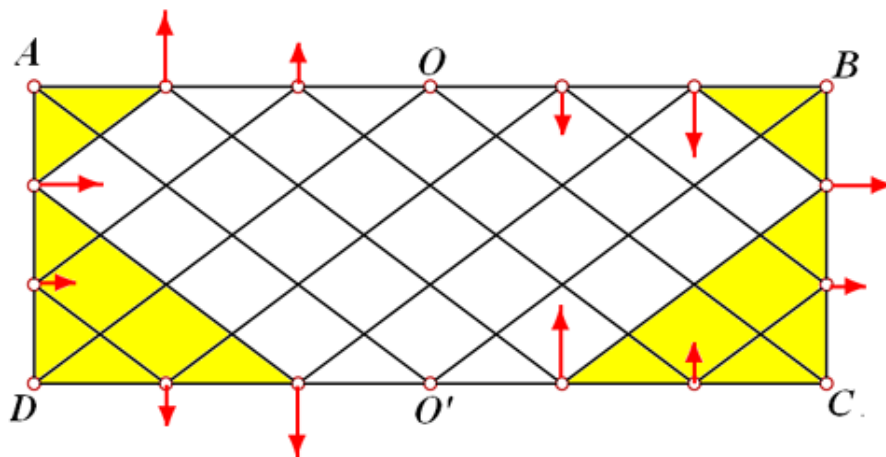


Рисунок 3 — Схема возможных скоростей узлов фермы с тремя панелями по вертикали и шестью по горизонтали

Приступая к расчёту ферм, подобных показанной на рис.1, заметим, что нахождение аналитической зависимости прогиба от числа панелей требует получения выражений для усилий в стержнях. Учитывая, что для чётных чисел n решения нет, принимаем $n = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Предполагаем, что все стержни характеризуются одинаковым поперечным сечением F и сделаны из одного и того же упругого материала с модулем упругости E . Взяв за основу приведённую в [6] типовую программу расчёта фермы для системы компьютерной математики Maple [7], составляем систему уравнений равновесия всех узлов фермы. В программу вводим координаты узлов и структуру решётки, которую задаём, указав для каждого стержня номера узлов, служащих его концами.

В систему уравнений равновесия узлов входят направляющие косинусы усилий. При отсутствии изгибающих моментов и перерезывающих сил (это обеспечивается шарнирным креплением стержней) для расчёта прогиба используется интеграл Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к узлу нижнего пояса в середине левого пролёта, l_i — длины стержней, EF — жёсткость стержней. Единичную вертикальную силу прикладываем к узлу в середине левого пролёта в узле, вертикальное смещение которого разыскивается. Решение имеет вид

$$\Delta_k = (A_k a^3 + C_k c^3 + H_k h^3) / (2h^2 EF),$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, а для определения коэффициентов воспользуемся *методом индукции*, успешно применявшимся ранее к задачам расчёта ферм М.Н.Кирсановым и его последователями (см. цитируемые работы).

Для этого проведём последовательный расчёт ферм с $k = 1, 2, \dots$ и выявим по его результатам последовательности коэффициентов при a^3 , c^3 и h^3 ; число рассчитываемых ферм должно быть взято достаточным для выявления закономерности образования коэффициентов.

Оператор **rgf_findrecur** системы Maple позволяет получить рекуррентное уравнение для общего члена последовательности, а оператор **rsolve** даёт решение этого уравнения [6,7].

Особенностью решаемой задачи является то, что точка приложения единичной силы (место определения прогиба) находится не точно в середине центра пролёта — в силу того, что для чётных n задача не имеет решения. Возникающая отсюда асимметрия значительно усложняет решение, и порядок рекуррентного уравнения для коэффициента при a^3 по сравнению с аналогичными задачами [8–13] существенно выше:

$$A_k = A_{k-1} - A_{k-2} + A_{k-3} + 4A_{k-4} - 4A_{k-5} + 4A_{k-6} - 4A_{k-7} - 6A_{k-8} + 6A_{k-9} - \\ - 6A_{k-10} + 6A_{k-11} + 4A_{k-12} - 4A_{k-13} + 4A_{k-14} - 4A_{k-15} - A_{k-16} + A_{k-17} - A_{k-18} + A_{k-19}.$$

Решение этого уравнения также оказывается достаточно громоздким:

$$A_k = ((80k^4 + 192k^3 + 160k^2 + 60k + 24) \sin \varphi - \\ - (22k^3 - 15k^2 + k - 9/2) \cos(2\varphi) + 57k^4 + 92k^3 + 51k^2 + 7k + 9/2) / 24,$$

где для компактности записи введено обозначение $\varphi = \pi k / 2$.

Аналогично находим и другие коэффициенты:

$$C_k = (8k^2 \sin \varphi + 6k^2 - 2k \cos(2\varphi) + 14k \sin \varphi + 4k + 1 - \cos(2\varphi) + 8 \sin \varphi) / 4,$$

$$H_k = 2(2k + 1)(\sin \varphi + 1).$$

Для оценки прочности и устойчивости стержней фермы требуются формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Можно предположить, что это — стержни в верхнем (сжатом) и нижнем (растянутом) поясах в середине пролёта (рис.1). Метод индукции даёт следующее значение для усилия в сжатом стержне:

$$O = -P(a/h)(3k^2 - 2k \cos(2\varphi) - \cos \varphi + \sin \varphi - \cos(2\varphi) + 3k + 2) / 4.$$

Усилие в центральном стержне пролёта в нижнем поясе даётся выражением

$$U = P(a/h)(3k^2 - 2k \cos(2\varphi) + \cos \varphi - \sin \varphi - \cos(2\varphi) + 3k) / 4.$$

Аналогично находим и реакции опор:

$$Y_A = (1 - (-1)^k + 4k) / 2, \quad Y_B = (-1)^k.$$

На этом решение рассмотренной здесь задачи можно считать завершённым.

Заметим, что в статье [8] метод индукции был применён к однопролётной ферме, для которой при чётном числе панелей также наступало кинематическое вырождение. В этой статье были получены выражения для прогиба в зависимости от числа панелей и дана картина распределения возможных скоростей в случае кинематической изменяемости (рис. 4).

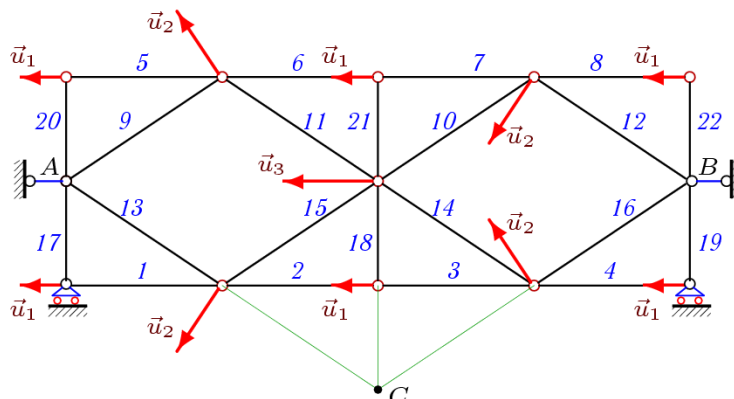


Рисунок 4 — Схема возможных скоростей узлов для однопролётной фермы, $n = 2$

В [9] было обнаружено появление кинематической изменяемости у распорной конструкции с *нечётным* числом панелей. В данной задаче при $n = 5$ распределение возможных скоростей выглядело так (рис. 5).

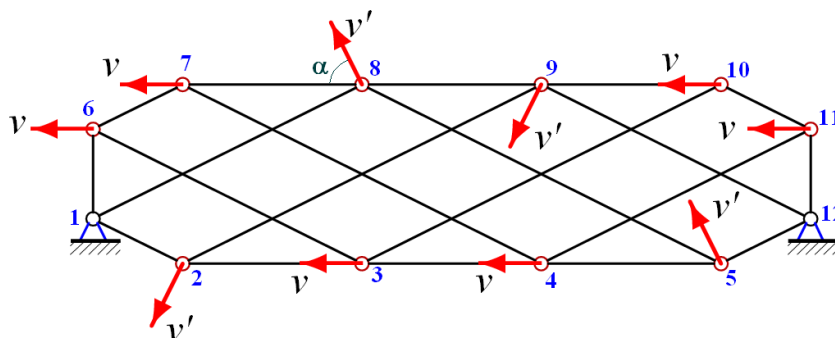


Рисунок 5 — Схема возможных скоростей узлов для распорной фермы, $n = 5$

Плоская ферма с четырьмя опорами была рассмотрена в [10]. Для этой фермы кинематическая изменяемость наступала для числа панелей в половине пролёта, кратного трём (рис. 6).

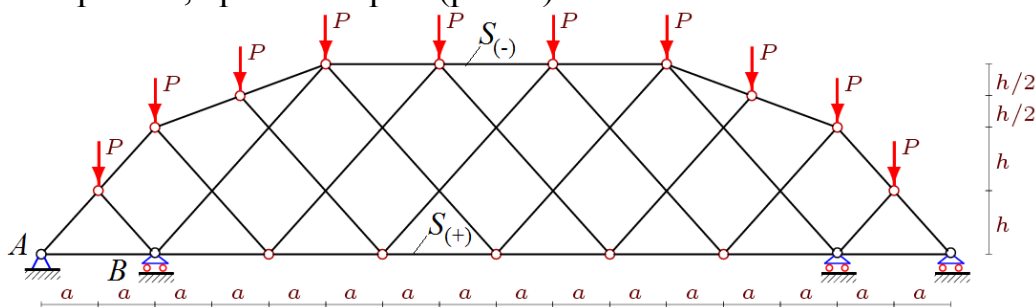


Рисунок 6 — Внешне статически неопределимая ферма с четырьмя опорами, $n = 4$

Условия кинематической изменяемости простой распорной фермы были проанализированы в [11], где кинематическая изменяемость конструкции имела место при нечётном числе панелей (рис.7).

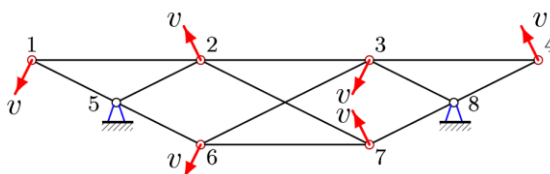


Рисунок 7 — Схема возможных скоростей узлов для внешне статически неопределимой фермы, $n = 3$

В [12] были найдены условия кинематической изменяемости для многорешётчатой фермы с четырьмя опорами (рис. 8). Оказалось, что при $n = 3, 4, 7, 10, 11, 14, \dots$ или при

$$n = 4k + 1 - \cos(\pi k) - 4\cos(\pi k / 2) - 2\sin(\pi k / 2), \quad k = 1, 2, \dots$$

определитель системы уравнений равновесия обращается в нуль. Этот факт подтверждала следующая схема возможных скоростей узлов (рис. 8).

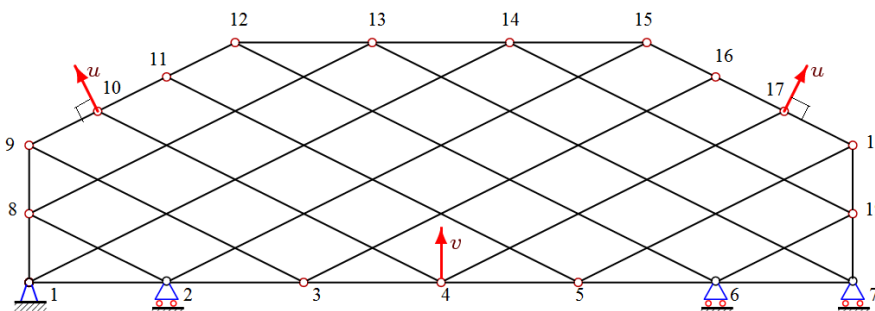


Рисунок 8 — Схема возможных скоростей узлов для многорешётчатой фермы с четырьмя опорами, $n = 3$

Предложенную в [13] статически определимую ферму с диагональной раскосной решёткой отличает отсутствие нижнего пояса. Мгновенная изменяемость конструкции имела место при числе панелей, кратном трём (рис. 9).

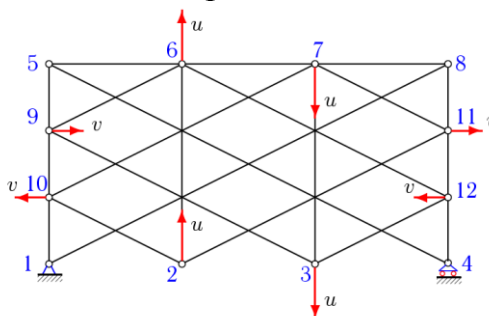


Рисунок 9 — Схема возможных скоростей узлов для фермы с прямолинейным верхним поясом, $n = 3$

В аналогичной по схеме ферме без нижнего пояса (рис. 10) эффект кинематического вырождения в процессе вывода аналитического выражения для прогиба найден не был [14].

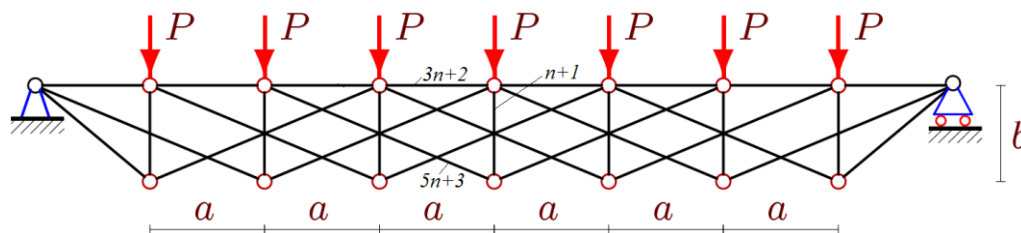


Рисунок 10 — Кинематически неизменяемая балочная ферма без нижнего пояса

Формулы для прогиба арочных ферм методом индукции получены в [15–19], для прогиба составной фермы — в [20]. В работах [21–30] методом индукции с применением операторов системы Maple также были применительно к ряду плоских ферм различной конструкции найдены конечные формулы зависимости прогиба от числа панелей.

Существенно меньшее число публикаций посвящено получению методом индукции аналитических формул для прогиба пространственных ферм. Здесь следует упомянуть статьи [31–37].

Библиографический список

1. Рабинович И.М. Курс строительной механики стержневых систем. 2-е изд. Ч. 1. Статически определимые системы. М.-Л.: Стройиздат, 1950. 388 с.
2. Мюллер-Бреслау Г. Графическая статика сооружений. 2-е изд. Т. 1. СПб.: К.Л.Риккер, 1908. 505 с.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт многорешётчатой фермы // Строительная механика и расчёт сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2–6.
4. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчёта прогиба балочной многорешётчатой фермы // Строительная механика и расчёт сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6–10.
5. Кирсанов М.Н. Расчёт жёсткости стержневой решётки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48–51.
6. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
7. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. 298 с.
8. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решётчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78, № 10. С. 24–27.
9. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решётчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
10. Кирсанов М.Н. Расчёт прогиба плоской решётчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15–18.
11. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8

- (107). С. 869–875.
12. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решётчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // *Строительная механика и конструкции*. 2017. Т. 1, № 14. С. 27–30.
 13. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. № 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
 14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт плоской регулярной фермы с растянутыми раскосами // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2017. № 3 (272). С. 31–35.
 15. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2017. № 5 (274). С. 9–14.
 16. Широков А.С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // *Международный научный семинар “Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии — GRACOS-17”* (Казань, 4–6 ноября 2017 г.): Сборник трудов / Под ред. Ю.Г. Игнатьева. Казань: Академия наук Республики Татарстан. 2017. С. 267–272.
 17. Савиных А.С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // *Строительство и архитектура*. 2017. Т. 5, № 3. С. 159–161. doi: 10.12737/article_59cd03d2d376e2.79712636
 18. Компанеец К.А. Расчёт смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролёта // *Молодёжь и наука*. 2017. № 4. С. 226.
 19. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Вывод зависимости прогиба арочной фермы от числа панелей в системе Maple // *Материалы Всероссийской научно-практической конференции “45 лет отрасли лёгких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск”* (Пятигорск, 3–5 апреля 2017 г.). Пятигорск: Изд-во ПФ СКФУ. 2017. С. 85–88.
 20. Кирсанов М.Н., Васьков М.И. О зависимости прогиба составной балочной фермы с параллельными поясами от числа панелей при загрузении верхнего пояса // *Моделирование и механика конструкций*. 2016. № 4. С.3.
 21. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчёта прогиба плоской фермы со сложной решёткой шпренгельного типа // *Транспортное строительство*. 2017. № 5. С. 11–13.
 22. Кирсанов М.Н. К выбору решётки балочной фермы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2017. № 3. С. 23–27.
 23. Кирсанов М.Н. Расчёт прогиба симметричной балочной фермы в аналитической форме // *Строительная механика и конструкции*. 2016. Т. 2, № 13. С. 5–9.
 24. Кирсанов М.Н., Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Анализ прогиба внешне статически неопределимой балочной фермы // *Строительная механика и*

- конструкции. 2017. Т. 1, № 14. С. 31–35.
25. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9, № 3. С. 560–569. doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
26. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решёткой // Строительство и архитектура. 2017. Т.5. №2. С. 122–125. doi: 10.12737/article_5950d11b5663a5.97032989
27. Кирсанов М.Н., Орлов И.В. Математическая модель упругой работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций. 2017. № 5. Ст. 1. 10 с.
28. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68. doi: 10.21821/2309-5180-2016-8-5-61-68
29. Воропай Р.А. Вывод зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей // Постулат. 2017. № 11. С. 33.
30. Воропай Р.А., Доманов Е.В. Индуктивный вывод зависимости прогиба плоской решётчатой фермы от числа панелей в системе Maple // Постулат. 2017. № 12. С. 11.
31. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчёта пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчёт сооружений. 2011. № 5. С. 11–15.
32. Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5–8.
33. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
34. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37–43.
35. Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчёт сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2–6.
36. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъёма на жёсткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. Т. 1 / Под ред. М.Н. Кирсанова. М.: ИНФРА-М, 2015. 120 с. С. 4–8.
37. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. P. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5